Examen de Lógica

07 de Diciembre de 2021

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

a. Dado un alfabeto Σ, la definición habitual de Σ^* se pide:

  I. Definir la función $invertir : \Sigma^* \to \Sigma^*$.

  II. Dada la definición de la función que concatena dos tiras con:

$$\begin{aligned} & con : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^* \\ & con(\epsilon, w) \quad\;\;\; = w \\ & con(xw_1, w_2) = x\ con(w_1, w_2) \end{aligned}$$

  Probar que se cumple:

$$(\bar{\forall} w_1 \in \Sigma^*)(\forall w_2 \in \Sigma^*)(\forall w_3 \in \Sigma^*)(con(w_1, con(w_2, w_3)) = con(con(w_1, w_2), w_3))$$

b. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 1; 2, 1; 2 \rangle$ con los símbolos P_1, f_1, f_2, c_1, c_2.

Sea una estructura de este tipo $A = \langle \Sigma^*, B, con, invertir, aa, bb \rangle$ con:

- $\Sigma = \{a, b\}$
- B definido inductivamente por las siguientes reglas:
  - I $\epsilon \in B$
  - II Si $x \in \Sigma$, $w \in B$ entonces $xwx \in B$
- $con, invertir$ las definidas en la parte a.

  I. Dar $t_1 \in \mathtt{TERM}_{\mathcal{L}}$, $t_2 \in \mathtt{TERM}_{\mathcal{L}}$ tales que $t_1 \neq t_2$ y $(f_2(f_1(t_1, t_2)))^A = (f_1(f_2(t_2), f_2(t_1)))^A$. Justificar su respuesta.

  II. Dar $t_3 \in \mathtt{TERM}_{\mathcal{L}}$, $t_1 \neq t_3$ y $t_2 \neq t_3$ que cumple: $A \models P_1(t_3)$. Justificar su respuesta.

  III. Concluir que $A \models (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(f_1(x_1, f_1(x_2, x_3)) =' f_1(f_1(x_1, x_2), x_3))$

Ejercicio 2 (25 puntos)

Se considera un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 1,1,1\rangle$ con símbolo de predicado P y símbolo de función f, ambos de aridad 1.

a. Se considera una estructura $\mathcal{M} = \langle U, R, F, w\rangle$.

Sean $a, b \in U$ tal que F(a) = b. Probar que se cumple:

I. $\mathcal{M} \models f(\bar{a}) =' \bar{b}$

II. Para toda $\varphi \in \texttt{FORM}$ tal que $\text{FV}(\varphi) = \{y\}$: $\mathcal{M} \models \varphi[^{f(\bar{a})}/_{y}] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[^{\bar{b}}/_{y}]$.

Sugerencia: Usar el teorema de sustitución:

Sean $t, t' \in \texttt{TERM}$, $\alpha \in \texttt{FORM}$ tales que t y t' están libres para x en α. Entonces:

$$\models t =' t' \to (\alpha[^{t}/_{x}] \leftrightarrow \alpha[^{t'}/_{x}])$$

b. Sea $\varphi \in \texttt{FORM}, \text{FV}(\varphi) = \{x, y\}$, x libre para y en φ.

I. Probar que para toda estructura $\mathcal{M}$ del tipo adecuado se cumple:

$$\mathcal{M} \models \varphi[^{f(x)}/_{y}] \Rightarrow \mathcal{M} \models \exists y \varphi$$

Puede utilizar sin probar la siguiente propiedad de las sustituciones:

$$\alpha[^{f(x)}/_{y}][^{t}/_{x}] = \alpha[^{t}/_{x}][^{f(t)}/_{y}]$$

donde α es una fórmula cualquiera, x e y son variables distintas, x está libre para y en α y t es un término cerrado (no contiene variables).

II. Probar con un contraejemplo que el recíproco no se cumple.

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construir derivaciones para probar los siguientes juicios. En ningún caso son válidas consideraciones semánticas.

a. $(\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\alpha \leftrightarrow \neg\beta) \vdash \bot$

b. $(\forall x)(P(x) \vee P(f(x))), (\exists x) f(x) =' x \vdash (\exists x)(P(x) \wedge P(f(x)))$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Indique cuáles de los siguientes conjuntos son consistentes, cuáles son completos y cuáles son consistentes maximales. Justifique sus respuestas.

a. $\{p_j \wedge \neg p_{j+1} \wedge \neg p_{j+2} | j = \dot{6}\}$

b. $\{\neg p_j \wedge p_{j+1} \wedge \neg p_{j+2} | j = \dot{3}\}$

c. $\textsc{Cons}(\{p_j \wedge \neg p_{j+1} \wedge \neg p_{j+2} | j = \dot{6}\}) \cup \textsc{Cons}(\{\neg p_j \wedge p_{j+1} \wedge \neg p_{j+2} | j = \dot{3}\})$

d. $\textsc{Cons}(\{\neg p_j \wedge p_{j+1} \wedge \neg p_{j+2} | j = \dot{3}\})$