Examen de Lógica

12 de Febrero de 2020

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Considere el conjunto $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f\}$.

a. Defina el lenguaje Σ^* de todas las tiras que se pueden construir sobre Σ.

b. Defina la función $Clean : \Sigma^* \times \Sigma \to \Sigma^*$, tal que $Clean(\omega, y)$ es la misma tira ω a la que se le eliminaron todas las ocurrencias de símbolo y . Ej: $Clean(ababce, b) = aace, Clean(aaaaaaa, a) = \epsilon$

c. Pruebe la corrección de la función $Clean$ o sea, que para cualquier $x \in \Sigma$ y cualquier $\omega \in \Sigma^*$, se cumple que $Clean(\omega, x)$ no tiene el elemento x. Use inducción cuando sea necesario.

d. Defina la función $Set : \Sigma^* \to \Sigma^*$ tal que devuelve una tira que tiene los mismos elementos que tiene el parámetro, pero apareciendo una sola vez cada uno. Ej: $Set(aab) = ab, Set(abacdca) = abcd$

e. Pruebe que para cualquier $\omega \in \Sigma^*$, $Set(\omega)$ cumple que no tiene símbolos repetidos.

Bosquejo de solución

a. La definición de Σ^* es la siguiente:

   I Si $\epsilon \in \Sigma^*$

   II Si $\omega \in \Sigma^*$ y $x \in \Sigma$ entonces $x\omega \in \Sigma^*$

b.

$$\begin{aligned}
&Clean : \Sigma^* \times \Sigma \to \Sigma^* \\
&Clean(\epsilon, y) \quad = \epsilon \\
&Clean(x\omega, y) = \begin{cases} Clean(\omega, y) \text{ si } x = y \\ xClean(\omega, y) \text{ en otro caso} \end{cases}
\end{aligned}$$

c. Demostrar que: Dado cualquier $y \in \Sigma$, se cumple que

$$(\bar{\forall}\omega \in \Sigma^*)(y \text{ no está en } Clean(\omega, y))$$

Para esto se plantea el siguiente teorema:

H) $y \in \Sigma$

T) $(\bar{\forall}\omega \in \Sigma^*)(y \text{ no está en } Clean(\omega, y))$

Dem.

Por inducción en $\Sigma*$.

PB.

T) y no está en $Clean(\epsilon, y)$

Dem.

Por definición de $Clean$, y se cumple que:

$$Clean(\epsilon, y) = \epsilon$$

Por definición, ϵ no tiene ningún elemento de Σ por lo que y no está en $Clean(\omega, y)$

□

PI.

H) y no está en $Clean(\omega, y)$

T) y no está en $Clean(x\omega, y)$.

Dem.

Se analizarán dos casos complementarios: $x = y$ y $x \neq y$.

Caso $x = y$ *

Por definición de $Clean$ se cumple que:

$$Clean(x\omega, y) = Clean(\omega, y)$$

Por hipótesis, se sabe que y no está en $Clean(\omega, y)$ por lo que queda probada la tesis.

Caso $x \neq y$ *

Por definición de $Clean$ se cumple que:

$$Clean(x\omega, y) = xClean(\omega, y)$$

Por hipótesis, se sabe que y no está en $Clean(\omega, y)$ y como y es distinto que x, se puede afirmar que y no está en $xClean(\omega, y)$ por lo que, nuevamente, queda probada la tesis.

De esta forma, se probó que la tesis se cumple para cualquier caso posible.

□

Aplicando el Principio de Inducción Primitiva para Σ^* con los teoremas anteriores, se puede afirmar que y no está en $Clean(\omega, y)$, cualquier sea el ω elegido.

□

d. La definición de $Set : \Sigma^* \to \Sigma^*$ es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} Set : \Sigma^* \to \Sigma^* & \\ Set(\epsilon) & = \epsilon \\ Set(x\omega) & = xClean(Set(\omega), x)) \end{array}$$

e. La propiedad a probar es que:

$$(\bar{\forall}\omega \in \Sigma^*)(\ Set(\omega) \text{ no tiene símbolos repetidos})$$

La prueba por inducción de la propiedad es la siguiente:

T) $(\bar{\forall}\omega \in \Sigma^*)(\ Set(\omega)$ no tiene símbolos repetidos)

Dem.

Se demuestran los siguientes teoremas:

T) $Set(\epsilon)$ no tiene símbolos repetidos.

Dem.

Por definición $Set(\epsilon) = \epsilon$. Como ϵ no tiene ningún símbolo, la propiedad se cumple.

□

H) $Set(\omega)$ no tiene símbolos repetidos

T) $Set(x\omega)$ no tiene símbolos repetidos.

Dem.

Por definición de Set, se cumple que $Set(x\omega) = xClean(Set(\omega), x)$.
La hipótesis garantiza que cualquier elemento en $Set(\omega)$ aparece una sola vez.
Por la propiedad probada en la parte **??** , se cumple que $Clean(Set(\omega), x)$ no tiene x (aunque lo tuviera ω).
Por este motivo, la única ocurrencia de x que está en $Set(x\omega)$ es la que se agrega como primer elemento del resultado.

□

La demostraciones anteriores, prueban como ciertas la hipótesis del Principio de Inducción Primitiva para Σ^* , lo que garantiza su tesis. O sea, que la propiedad se cumple para todos los elementos de Σ^*.

□

Ejercicio 2 (25 puntos)

a. I. Demuestre que se cumple la propiedad siguiente. Justifique:

Para todo $\Gamma \subseteq$ `SENT`, y para toda $\sigma \in$ `SENT`: si Γ es consistente y $\Gamma \models \neg\sigma$ entonces $\Gamma \not\models \sigma$

II. Demuestre que si se quita la condición "Γ consistente" de las hipótesis, la propiedad anterior deja de cumplirse.

III. Indique si se cumple la propiedad siguiente (Justifique):

Para todo $\Gamma \subseteq$ `SENT`, y para toda $\sigma \in$ `SENT` : si $\Gamma \not\models \sigma$ entonces $\Gamma \models \neg\sigma$.

b. Sean las fórmulas:

- $\alpha := P(x) \to (\exists y)Q(y, x)$
- $\beta := P(x) \vee \neg(\exists y)Q(y, x)$

I. Indique un tipo de similaridad apropiado.

II. Dé una estructura $\mathcal{M}_1$ del tipo de similaridad dado tal que: $\mathcal{M}_1 \models \alpha$ $\mathcal{M}_1 \not\models \beta$. Justifique. En caso de no ser posible explique por qué.

Bosquejo de solución

a. I. Como Γ es consistente, existe $\mathcal{M}$ estructura del tipo de similaridad apropiado tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$.
Como $\Gamma \models \neg\sigma$, podemos concluir que $\mathcal{M} \models \neg\sigma$. Aplicando 2.4.5: $\mathcal{M} \not\models \sigma$
Se ha encontrado $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$ y $\mathcal{M} \not\models \sigma$. De acuerdo con la definición de consecuencia lógica: $\Gamma \not\models \sigma$ (como queríamos probar).

II. Si Γ es inconsistente, cualquier fórmula es consecuencia de Γ. Por lo tanto, no se cumple $\Gamma \not\models \sigma$.

III. La propiedad no se cumple.
Vamos a dar un contra ejemplo. Consideramos el tipo de smiliaridad $\langle 1, -, 1\rangle$ Sea $\sigma = P_1(c_1)$ y $\Gamma = \emptyset$. Podemos probar que $\not\models \sigma$ y $\not\models \neg\sigma$
Consideramos la estructura $\mathcal{M}_1 = \langle\{\bullet\}, \emptyset, \bullet\rangle$.
Aplicando definición de $\models$, obtenemos que: $\mathcal{M}_1 \models \sigma \Leftrightarrow \bullet \in \emptyset$.
Entonces $\mathcal{M}_1 \not\models \sigma$ y por lo tanto $\not\models \sigma$
Considero ahora la estructura $\mathcal{M}_2 = \langle\{\bullet\}, \{\bullet\}, \bullet\rangle$.
Aplicando definición de $\models$, obtenemos que: $\mathcal{M}_2 \models \neg\sigma \Leftrightarrow \bullet \notin \{\bullet\}$.
Entonces $\mathcal{M}_2 \not\models \neg\sigma$ y por lo tanto $\not\models \neg\sigma$.

b. I. Un tipo de similaridad apropiado podría ser: $\langle 1, 2; -; 0\rangle$

II. Definimos $\mathcal{M}_1 = \langle\{\bullet\}, \emptyset, \{(\bullet, \bullet)\}\rangle$.

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M}_1 \models \alpha \\
\Leftrightarrow \text{(clausura)} \\
\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(P(x) \to (\exists y)Q(y, x)) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\forall} a \in \{\bullet\}) : \mathcal{M}_1 \models P(\bar{a}) \to (\exists y)Q(y, \bar{a})) \\
\Leftrightarrow \text{(def. de } \mathcal{M}_1\text{)} \\
\mathcal{M}_1 \models P(\bar{\bullet}) \to (\exists y)Q(y, \bar{\bullet})) \\
\Leftarrow \text{(def. de } \models \text{ y } v^{\mathcal{M}_1}\text{)} \\
v^{\mathcal{M}_1}(P(\bar{\bullet})) = 0 \\
\Leftrightarrow \text{(def. } v^{\mathcal{M}_1}\text{)} \\
\bullet \notin \emptyset \\
\square
\end{array}
$$

Se concluye que $\mathcal{M}_1 \models \alpha$.

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M}_1 \models \beta \\
\Leftrightarrow \text{(clausura)} \\
\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(P(x) \vee \neg(\exists y)Q(y, x)) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\forall} a \in \{\bullet\}) : \mathcal{M}_1 \models P(\bar{a}) \vee \neg(\exists y)Q(y, \bar{a}) \\
\Leftrightarrow \text{(def. de } \mathcal{M}_1\text{)} \\
\mathcal{M}_1 \models P(\bar{\bullet}) \vee \neg(\exists y)Q(y, \bar{\bullet}) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
\mathcal{M}_1 \models P(\bar{\bullet}) \text{ o } \mathcal{M}_1 \models \neg(\exists y)Q(y, \bar{\bullet})
\end{array}
$$

La última disyunción no se cumple ya que ambas afirmaciones son falsas:

- $\mathcal{M}_1 \models P(\bar{\bullet})$
  $\Leftrightarrow$ (definición de $\models$)
  $v^{\mathcal{M}_1}(P(\bar{\bullet})) = 1$
  $\Leftrightarrow$ (definición de v^-)
  $\bullet \in \emptyset$
- y además:

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_1 \models \neg(\exists y)Q(y,\bar{\bullet}) \\ \Leftrightarrow \text{(definición de } \models) \\ v^{\mathcal{M}_1}(\neg(\exists y)Q(y,\bar{\bullet})) = 1 \\ \Leftrightarrow \text{(definición de } v^-) \\ v^{\mathcal{M}_1}((\exists y)Q(y,\bar{\bullet})) = 0 \\ \Leftrightarrow \text{(definición de } v^-) \\ \max\{v^{\mathcal{M}_1}(Q(\bar{a},\bar{\bullet})) \mid a \in |\mathcal{M}_1|\} = 0 \\ \Leftrightarrow \text{(definición de } \mathcal{M}_1) \\ v^{\mathcal{M}_1}(Q(\bar{\bullet},\bar{\bullet})) = 0 \\ \Leftrightarrow \text{(definición de } v^-) \\ (\bullet,\bullet) \notin \{(\bullet,\bullet)\} \end{array}$$

Como ambas afirmaciones son falsas, se concluye que es falsa la disyunción: $\mathcal{M}_1 \models P(\bar{\bullet})$ o $\mathcal{M}_1 \models \neg(\exists y)Q(y,\bar{\bullet})$ por lo que también es falso que $\mathcal{M}_1 \models \beta$.

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguientes juicios. En ningún caso son válidas consideraciones semánticas:

a. $(\forall x)(P(x) \to R(f(g(x)))), (\forall x)(R(f(x)) \to Q(x)) \vdash (\forall x)(P(x) \to Q(g(x)))$
b. $\vdash (\exists y)(\exists x)((P(x) \to Q(x)) \lor (P(y) \to \neg Q(y)))$

Bosquejo de solución

a. $(\forall x)(P(x) \to R(f(g(x)))), (\forall x)(R(f(x)) \to Q(x)) \vdash (\forall x)(P(x) \to Q(g(x)))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(R(f(x)) \to Q(x))}{R(f(g(x))) \to Q(g(x))}\,E_\forall^{**} \qquad \dfrac{\dfrac{(\forall x)(P(x) \to R(f(g(x))))}{P(x) \to R(f(g(x)))}\,E_\forall^{***} \qquad [P(x)]^{(1)}}{R(f(g(x)))}\,E_\to}{Q(g(x))}\,E_\to}{(P(x) \to Q(g(x)))}\,I_\to^{(1)}}{(\forall x)(P(x) \to Q(g(x)))}\,I_\forall^{*}$$

* x no está libre en $(\forall x)(P(x) \to R(f(g(x))))$ ni en $(\forall x)(R(f(x)) \to Q(x))$

** $g(x)$ está libre para x en $R(f(x)) \to Q(x)$.

*** x está libre para x en $P(x) \to R(f(g(x)))$

b. $\vdash (\exists y)(\exists x)((P(x) \to Q(x)) \vee (P(y) \to \neg Q(y)))$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg((P(y) \to Q(y)) \vee (P(y) \to \neg Q(y)))]^{(1)}$}
\AxiomC{$[\neg((P(y) \to Q(y)) \vee (P(y) \to \neg Q(y)))]^{(1)}$}
\AxiomC{$[Q(y)]^{(2)}$}
\RightLabel{$I_{\to}$}
\UnaryInfC{$P(y) \to Q(y)$}
\RightLabel{$I_{\vee}$}
\UnaryInfC{$(P(y) \to Q(y)) \vee (P(y) \to \neg Q(y))$}
\RightLabel{$E_{\neg}$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$I_{\neg}^{(2)}$}
\UnaryInfC{$\neg Q(y)$}
\RightLabel{$I_{\to}$}
\UnaryInfC{$P(y) \to \neg Q(y)$}
\RightLabel{$I_{\vee}$}
\UnaryInfC{$(P(y) \to Q(y)) \vee (P(y) \to \neg Q(y))$}
\RightLabel{$E_{\neg}$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$RAA^{(1)}$}
\UnaryInfC{$(P(y) \to Q(y)) \vee (P(y) \to \neg Q(y))$}
\RightLabel{$I_{\exists}(*2)$}
\UnaryInfC{$(\exists x)((P(x) \to Q(x)) \vee (P(y) \to \neg Q(y)))$}
\RightLabel{$I_{\exists}(*1)$}
\UnaryInfC{$(\exists y)(\exists x)((P(x) \to Q(x)) \vee (P(y) \to \neg Q(y)))$}
\end{prooftree}
$$

$(*1)$ y está libre para y en $(\exists x)((P(x) \to Q(x)) \vee (P(y) \to \neg Q(y)))$
$(*2)$ y está libre para x en $(P(x) \to Q(x)) \vee (P(y) \to \neg Q(y))$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Sean los conjuntos:

- $\Delta_1 = \{p_i \to p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$
- $\Delta_2 = \{\neg p_{2i} \mid i \in \mathbb{N}\}$
- $\Delta_3 = \{p_{2i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$

a. Pruebe que se cumplen las siguientes afirmaciones:

   I. $\Delta_1 \cup \Delta_2$ es consistente.
   II. $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ es inconsistente.

b. Determina si se cumplen las siguientes afirmaciones. Justifique.

   I. $\textsc{Cons}(\Delta_1) \cup \textsc{Cons}(\Delta_2)$ es una teoría.
   II. $\Delta_1 \cup \Delta_2$ es completo.

   Nota: Un conjunto de fórmulas Γ es **completo** si y sólo si Γ es consistente y para cualquier fórmula $\varphi \in \mathtt{PROP}$, se cumple que:

   - O bien, $\Gamma \vdash \varphi$.
   - O bien, $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Bosquejo de solución

a. I. Sea v la valuacion que asigna 0 a todas las letras proposicionales.

$$
\begin{array}{l}
v(\neg p_{2i}) \\
= \text{(def. de valuación)} \\
1 - v(p_{2i}) \\
= \text{(def. de v)} \\
1 - 0 \\
= \text{(aritmética)} \\
1
\end{array}
$$

Se concluye que $v(\Delta_2) = 1$.

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
&v(pi \to p_{i+1})\\
&= \text{(def. de valuación)}\\
&max\{1 - v(p_i), v(p_{i+1})\}\\
&= \text{(def. de } v\text{)}\\
&max\{1, v(p_{i+1})\}\\
&= \text{(definición máximo)}\\
&1
\end{aligned}$$

Se concluye que $v(\Delta_1) = 1$.

Por lo tanto: $v(\Delta_1 \cup \Delta_2) = 1$ y concluimos que $\Delta_1 \cup \Delta_2$ es consistente (por caracterización semántica de consistencia).

II. Consideramos la siguiente derivación:

$$\dfrac{\neg p_2 \quad \dfrac{p_1 \to p_2 \quad p_1}{p_2}\, E_\to}{\bot}\, E_\neg$$

donde

- $\neg p_2 \in \Delta_2$
- $p_1 \in \Delta_3$
- $p_1 \to p_2 \in \Delta_1$.

Por lo tanto: $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \vdash \bot$. Esto es: el conjunto $(\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3)$ es inconsistente.

b. I. La afirmación es **falsa**.

Consideramos la fórmula $\neg p_1$.

Vamos a probar que

(1) $\textsc{Cons}(\Delta_1) \cup \textsc{Cons}(\Delta_2) \vdash \neg p_1$

(2) $\neg p_1 \notin \textsc{Cons}(\Delta_1) \cup \textsc{Cons}(\Delta_2)$

La afirmación (1) la probamos con la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{\neg p_2 \quad \dfrac{p_1 \to p_2 \quad [p_1]^{(1)}}{p_2}\, E_\to}{\bot}\, E_\neg}{\neg p_1}\, I_\neg^{(1)}$$

Probaré que $\neg p_1 \notin \textsc{Cons}(\Delta_1)$. Para ello, alcanza con probar que $\Delta_1 \nvdash \neg p_1$.

Considerando la valuación v' dada en la parte anterior, tenemos que $v'(\Delta_1) = 1$ y $v'(\neg p_1) = 1 - v'(p_1) = 0$. Por lo tanto, $\Delta_1 \not\models \neg p_1$ y por correctitud $\Delta_1 \nvdash \neg p_1$.

Probaré ahora que $\neg p_1 \notin \textsc{Cons}(\Delta_2)$. Considero la valuación v'' definida como sigue:

- $v''(p_1) = 1$
- $v''(p_k) = 0$ si $k \neq 1$

Vemos que

- $v''(\Delta_2) = 1$ ya que $v''(\neg p_{2i}) = 1 - v''(p_{2i}) = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
- $v''(\neg p_1) = 1 - v''(p_1) = 0$

$\Rightarrow \Delta_2 \not\models \neg p_1$ (def. de $\models$)
$\Rightarrow \Delta_2 \nvdash \neg p_1$ (correctitud)
$\Rightarrow \neg p_1 \notin \textsc{Cons}(\Delta_2)$

En resumen, se ha probado que la fórmula $\neg p_1 \notin \textsc{Cons}(\Delta_1) \cup \textsc{Cons}(\Delta_2)$ pero sí se deriva de ese conjunto. Esto prueba que el conjunto no es una teoría.

II. La afirmación es verdadera.

Ya hemos probado que $\Delta_1 \cup \Delta_2$ es consistente ya que la valuación v que asigna 0 a todas las letras proposicionales es tal que $v(\Delta_1 \cup \Delta_2) = 1$.

Probaremos que esta es la única valuación que cumple dicha propiedad.

Sea v_1 una valuación tal que $v_1(\Delta_1) = 1$ y $v_1(\Delta_2) = 1$. Tenemos que:

$$\begin{array}{l} \neg p_{2i} \in \Delta_2 \\ \Rightarrow \text{(hipótesis sobre } v_1) \\ v_1(\neg p_{2i}) = 1 \\ \Leftrightarrow \text{(def. de valuación)} \\ 1 - v_1(p_{2i}) = 1 \\ \Leftrightarrow \text{(aritmética)} \\ v_1(p_{2i}) = 0 \end{array}$$

Por lo tanto v_1 asigna 0 a todas las letras proposicionales con índice par.

Consideremos ahora una fórmula $p_i \to p_{i+1}$ con i impar.

$$\begin{array}{l} p_i \to p_{i+1} \in \Delta_1 \\ \Rightarrow \text{(hipótesis sobre } v_1) \\ v(p_i \to p_{i+1}) = 1 \\ \Leftrightarrow \text{(def. de valuación)} \\ \max\{1 - v_1(p_i), v_1(p_{i+1})\} = 1 \\ \Leftrightarrow (\ i+1 \text{ es par}) \\ \max\{1 - v_1(p_i), 0\} = 1 \\ \Leftrightarrow \text{(máximo)} \\ 1 - v_1(p_i) = 1 \\ \Leftrightarrow \text{(aritmética)} \\ v_1(p_i) = 0 \end{array}$$

Por lo tanto v_1 también asigna 0 a las letras proposicionales con índice impar.

Entonces v_1 es la misma valuación que la valuación v (ya que una valuación queda determinada por su asignación a las letras de proposición).

Por lo anterior, concluímos que hay una única valuación que asigna 1 a todos los elementos del conjunto $\Delta_1 \cup \Delta_2$. Luego, este conjunto es completo.