Examen de Lógica

15 de Diciembre de 2020

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Sea $\Sigma = \{b, a, o, (,)\}$ y $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ definido inductivamente por las siguientes reglas:

I $b \in \mathcal{L}$.

II Si $w_1 \in \mathcal{L}$ y $w_2 \in \mathcal{L}$ entonces $(w_1 a w_2) \in \mathcal{L}$.

III Si $w_1 \in \mathcal{L}$ y $w_2 \in \mathcal{L}$ entonces $(w_1 o w_2) \in \mathcal{L}$.

a. Dé 2 elementos $e_1, e_2 \in \mathcal{L}$ distintos entre sí que tengan más de 5 símbolos cada uno de ellos. No es necesario demostrar que efectivamente pertenecen al conjunto.

b. Escribir una función $f : \mathcal{L} \to \texttt{PROP}$ tal que interprete el símbolo b como $\bot$, el símbolo a como el conectivo $\wedge$ y el símbolo o como el conectivo $\vee$.

c. Demostrar inductivamente que $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L}) \models \neg f(w)$

Bosquejo de solución

a.
- $e_1 = ((bab)ab)$
- $e_2 = ((bab)o(bab))$

b.

$$\begin{aligned}
&f : \mathcal{L} \to \texttt{PROP} \\
&f(b) &&= \bot \\
&f((w_1 a w_2)) &&= (f(w_1) \wedge f(w_2)) \\
&f((w_1 o w_2)) &&= (f(w_1) \vee f(w_2))
\end{aligned}$$

c. $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L}) \models \neg f(w)$

Demostración usando el PIP para $\mathcal{L}$, con $P(w) := \quad \models \neg f(w)$

Paso Base

Tesis) $P(b) = \quad \models \neg f(b)$

Demo.

$$\models \neg f(b)$$
$$\Leftrightarrow \text{(Definición de } f\text{)}$$
$$\models \neg\bot$$
$$\Leftrightarrow \text{(Definición de } \models\text{)}$$
$$(\bar{\forall} v : \text{valuación})(v(\neg\bot) = 1)$$
$$\Leftrightarrow \text{(Definición de valuación)}$$
$$(\bar{\forall} v : \text{valuación})(v(\bot) = 0)$$

Esto se cumple por la definición de valuación.

Paso Inductivo 1

Hip.)

- $P(w_1) = \quad \models \neg f(w_1)$
- $P(w_2) = \quad \models \neg f(w_2)$

Tesis) $P(w_1 a w_2) = \quad \models \neg f(w_1 a w_2)$

Demo.

$$\models \neg f(w_1 a w_2)$$
$$\Leftrightarrow \text{(Definición de } f\text{)}$$
$$\models \neg(f(w_1) \wedge f(w_2))$$
$$\Leftrightarrow \text{(Definición de } \models\text{)}$$
$$(\bar{\forall} v : \text{valuación})(v(\neg(f(w_1) \wedge f(w_2)))) = 1)$$
$$\Leftrightarrow \text{(Definición de valuación)}$$
$$(\bar{\forall} v : \text{valuación})(v((f(w_1) \wedge f(w_2)))) = 0)$$
$$\Leftrightarrow \text{(Definición de valuación)}$$
$$(\bar{\forall} v : \text{valuación})(\text{mín}\,\{v(f(w_1)), v(f(w_2))\} = 0)$$
$$\Leftrightarrow \text{(Definición de mínimo y valuación)}$$
$$(\bar{\forall} v : \text{valuación})(v(f(w_1)) = 0 \text{ o } v(f(w_2)) = 0)$$
$$\Leftrightarrow \text{(Definición de valuación)}$$
$$(\bar{\forall} v : \text{valuación})(v(\neg f(w_1)) = 1 \text{ o } v(\neg f(w_2)) = 1)$$
$$\Leftarrow \text{(condición suficiente para el or)}(\bar{\forall} v : \text{valuación})(v(\neg f(w_1)) = 1)$$
$$\Leftrightarrow \text{(Definición de } \models\text{)}$$
$$\models \neg f(w_1)$$

Esto se cumple por Hipótesis Inductiva.

Paso Inductivo 2

Hip.)

- $P(w_1) = \quad \models \neg f(w_1)$
- $P(w_2) = \quad \models \neg f(w_2)$

Tesis) $P(w_1 o w_2) = \quad \models \neg f(w_1 o w_2)$

Demo.

$\models \neg f(w_1 a w_2)$

$\Leftrightarrow$ (Definición de f)

$\models \neg(f(w_1) \vee f(w_2))$

$\Leftrightarrow$ (Definición de $\models$)

$(\bar{\forall} v : \text{valuación})(v(\neg(f(w_1) \vee f(w_2))) = 1)$

$\Leftrightarrow$ (Definición de valuación)

$(\bar{\forall} v : \text{valuación})(v((f(w_1) \vee f(w_2))) = 0)$

$\Leftrightarrow$ (Definición de valuación)

$(\bar{\forall} v : \text{valuación})(\text{máx}\,\{v(f(w_1)), v(f(w_2))\} = 0)$

$\Leftrightarrow$ (Definición de máximo y valuación)

$(\bar{\forall} v : \text{valuación})(v(f(w_1)) = 0 \text{ y } v(f(w_2)) = 0)$

$\Leftrightarrow$ (Distributiva del para todo)

$(\bar{\forall} v : \text{valuación})(v(\neg f(w_1)) = 1) \text{ y } (\bar{\forall} v : \text{valuación})(v(\neg f(w_2)) = 1)$

$\Leftrightarrow$ (Definición de $\models$)

$\models \neg f(w_1) \text{ y } \models \neg f(w_2)$

Esto se cumple por Hipótesis Inductiva.

Ejercicio 2 (25 puntos)

a. I. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden de tipo $\langle 1; -; 0 \rangle$. De un modelo distinto para cada una de las siguientes fórmulas. Justifique
   a. $P(x)$
   b. $(\forall x)P(x)$

   II. Demuestre que las fórmulas anteriores no son equivalentes. Justifique.

b. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.
   I. $(\bar{\forall}\varphi, \psi \in \texttt{SENT})(\bar{\forall}\Gamma \subset \{\varphi, \psi\})(\Gamma \models \varphi \vee \psi)$

Bosquejo de solución

a. I. Sea $\mathcal{M}_1 = \langle \mathbb{N}, \mathbb{N} \rangle$.

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_1 \models P(x) \\ \Leftrightarrow \text{(def. } \models) \\ \mathcal{M}_1 \models (\forall x)P(x) \\ \Leftrightarrow (2.4.5) \\ (\bar{\forall} a \in \mathbb{N}), \mathcal{M}_1 \models P(\bar{a}) \\ \Leftrightarrow (2.4.5) \\ (\bar{\forall} a \in \mathbb{N}), a \in \mathbb{N} \end{array}$$

Lo que claramente es cierto, por lo que $\mathcal{M}_1 \models P(x)$.

Sea $\mathcal{M}_2 = \langle \{\circ, \bullet\}, \{\circ, \bullet\} \rangle$.

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_2 \models (\forall x)P(x) \\ \Leftrightarrow (2.4.5) \\ (\bar{\forall} a \in \{\circ, \bullet\}), \mathcal{M}_2 \models P(\bar{a}) \\ \Leftrightarrow (2.4.5) \\ (\bar{\forall} a \in \{\circ, \bullet\}), a \in \{\circ, \bullet\} \end{array}$$

Lo que claramente es cierto, por lo que $\mathcal{M}_2 \models (\forall x)P(x)$.

II. $P(x)$ y $(\forall x)P(x)$ **no** son equivalentes.

Sea $\mathcal{M} = \langle \{\circ, \bullet\}, \{\circ\} \rangle$. Entonces:

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} \not\models P(x) \leftrightarrow (\forall x)P(x) \\ \Leftrightarrow \text{(def. } \models) \\ \mathcal{M} \not\models (\forall x)(P(x) \leftrightarrow (\forall x)P(x)) \\ \Leftrightarrow (2.4.5) \\ (\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|), \mathcal{M} \not\models (P(\bar{a}) \leftrightarrow (\forall x)P(x)) \\ \Leftarrow \text{(tomando } a = \circ) \\ \mathcal{M} \not\models (P(\bar{\circ}) \leftrightarrow (\forall x)P(x)) \\ \Leftarrow (2.4.5) \\ \mathcal{M} \models P(\bar{\circ}) \text{ y } \mathcal{M} \not\models (\forall x)P(x)) \\ \Leftrightarrow (2.4.5) \\ \circ \in \{\circ\} \text{ y } (\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \not\models P(\bar{b})) \\ \Leftarrow \text{(tomando } b = \bullet) \\ \circ \in \{\circ\} \text{ y } \mathcal{M} \not\models P(\bar{\bullet}) \\ \Leftrightarrow (2.4.5) \\ \circ \in \{\circ\} \text{ y } \bullet \notin \{\circ\} \end{array}$$

Esta última afirmación se cumple, por lo que las fórmulas no son equivalentes.

b. I. La afirmación es **falsa**. Sea $\Gamma = \emptyset,\ \varphi = \bot, \psi = \bot$ Veremos que no se cumple $\Gamma \models \varphi \vee \psi$

$$\begin{array}{l} \Gamma \not\models \varphi \vee \psi \\ \Leftrightarrow \text{(Def. } \Gamma,\ \varphi, \psi) \\ \not\models \bot \vee \bot \\ \Leftrightarrow \text{(Def. } \not\models) \\ (\bar{\exists} v) v(\bot \vee \bot) = 0 \end{array}$$

Y esto se cumple para cualquier valuación por definición de valuación.

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguientes juicios. En ningún caso son válidas consideraciones semánticas:

a. $\neg r \to \neg(p \to q) \vdash \neg q \vee r$

b. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x =' y \vee x =' z) \vdash (\exists x)P(x) \to (\forall y)P(y)$

Bosquejo de solución

a. $\neg r \to \neg(p \to q) \vdash \neg q \vee r$

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg(\neg q \vee r)]^3$}
\AxiomC{$\neg r \to \neg(p \to q)$}
\AxiomC{$[\neg(\neg q \vee r)]^3$}
\AxiomC{$[r]^1$}
\RightLabel{$I\vee$}
\UnaryInfC{$q \vee r$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$I\neg(1)$}
\UnaryInfC{$\neg r$}
\RightLabel{$E \to$}
\BinaryInfC{$\neg(p \to q)$}
\AxiomC{$[q]^2$}
\RightLabel{$I \to$}
\UnaryInfC{$p \to q$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$I\neg(2)$}
\UnaryInfC{$\neg q$}
\RightLabel{$I\vee$}
\UnaryInfC{$\neg q \vee r$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$RAA(3)$}
\UnaryInfC{$\neg q \vee r$}
\end{prooftree}$$

b. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x =' y \vee x =' z) \vdash (\exists x)P(x) \to (\forall x)P(x)$

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$[(\exists x)P(x)]^3$}
\AxiomC{$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x =' y \vee x =' z)$}
\RightLabel{$E\forall(*6)$}
\UnaryInfC{$(\forall y)(\forall z)(x =' y \vee x =' z)$}
\RightLabel{$E\forall(*5)$}
\UnaryInfC{$(\forall z)(x =' y \vee x =' z)$}
\RightLabel{$E\forall(*4)$}
\UnaryInfC{$x =' y \vee x =' y$}
\AxiomC{$[x =' y]^1$}
\AxiomC{$[P(x)]^2$}
\RightLabel{$RI4(*5)$}
\BinaryInfC{$P(y)$}
\AxiomC{$[x =' y]^1$}
\AxiomC{$[P(x)]^2$}
\RightLabel{$RI4(*3)$}
\BinaryInfC{$P(y)$}
\RightLabel{$E\vee^1$}
\TrinaryInfC{$P(y)$}
\RightLabel{$E\exists^2(*2)$}
\BinaryInfC{$P(y)$}
\RightLabel{$I\forall(*1)$}
\UnaryInfC{$(\forall y)P(y)$}
\RightLabel{$I \to (3)$}
\UnaryInfC{$(\exists x)P(x) \to (\forall y)P(y)$}
\end{prooftree}$$

(*1) $y \notin FV\{(\exists x)P(x), (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x =' y \vee x =' z)\}$

(*2) $x \notin FV\{P(y), (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x =' y \vee x =' z)\}$

(*3) x, y libres para z en $P(z)$

(*4) y libre para z en $x =' y \vee x =' z$

(*5) y libre para y en $(\forall z)(x =' y \vee x =' z)$

(*6) x libre para x en $(\forall y)(\forall z)(x =' y \vee x =' z)$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Diremos que $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$ es **íntegro** si cumple: $(\bar{\forall} i \in \mathbb{N})\ (\Gamma \vdash p_i \Leftrightarrow \Gamma \nvdash \neg p_i)$

Recuerde que un conjunto $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$ es completo si y solo si Γ es consistente y $(\bar{\forall} \varphi \in \texttt{PROP})(\Gamma \vdash \varphi$ o $\Gamma \vdash \neg\varphi)$

a. Demostrar que todo conjunto íntegro es consistente.
b. Demostrar que todo conjunto completo es íntegro.
c. Demostrar que si Γ es íntegro y v es una valuación tal que $v(\Gamma) = 1$ se cumple: $(\bar{\forall} i \in \mathbb{N})\quad v(p_i) = 1 \Leftrightarrow \Gamma \vdash p_i$
d. Demuestre que todo conjunto íntegro es completo.

Bosquejo de solución

a. **H)** Γ íntegro

T) Γ consistente

Dem.

Supongamos Γ inconsistente.

Por ser inconsistente $\Gamma \vdash p_1$ y $\Gamma \vdash \neg p_1$ dado que de un conjunto inconsistente se deriva cualquier fórmula de `PROP`.

Por otro lado, por definición de íntegro: si $\Gamma \vdash p_1$ entonces $\Gamma \nvdash \neg p_1$ y llegamos a una contradicción.

Se concluye que Γ es consistente.

$\square$

b. Sea Γ completo.

H) $\Gamma \vdash p_i$

T) $\Gamma \nvdash \neg p_i$

Dem.

Γ es consistente por ser completo. Por lo tanto si $\Gamma \vdash p_i$ entonces $\Gamma \nvdash \neg p_i$

$\square$

H) $\Gamma \nvdash \neg p_i$

T) $\Gamma \vdash p_i$

Dem.

Por definición de completo: $\Gamma \vdash p_i$ o $\Gamma \vdash \neg p_i$.
Por hipótesis: $\Gamma \nvdash \neg p_i$.
Luego: $\Gamma \vdash p_i$.

□

Queda porbado que $\Gamma \vdash p_i \Leftrightarrow \Gamma \nvdash \neg p_i$.
Como la prueba se hizo para un p_i genérico vale para todo p_i.

c. Suponemos Γ íntegro y $v(\Gamma) = 1$.

Considero p_i una letra proposicional cualquiera:

H) $v(p_i) = 1$

T) $\Gamma \vdash p_i$

Dem.

Si $v(p_i) = 1$, entonces $v(\neg p_i) = 0$ (definición de valuación).
Como $v(\Gamma) = 1$, se deduce que $\Gamma \not\models \neg p_i$ (definición de consecuencia lógica).
Aplicando correctitud: $\Gamma \nvdash \neg p_i$.
Por ser Γ íntegro: $\Gamma \vdash p_i$

□

H) $\Gamma \vdash p_i$

T) $v(p_i) = 1$

Dem.

Por hipótesis: $\Gamma \vdash p_i$. Luego, por correctitud: $\Gamma \models p_i$.
Como $v(\Gamma) = 1$, aplicando definición de consecuencia lógica: $v(p_i) = 1$

□

Queda probado que: $v(p_i) = 1 \Leftrightarrow \Gamma \vdash p_i$.

Como la prueba se hizo para un p_i arbitrario, vale para todo p_i.

d. Por parte a) Γ es consistente y existe una valuación v tal que $v(\Gamma) = 1$.

Por parte c) sabemos que cualquier valuación que cumpla $v(\Gamma) = 1$, le asigna los mismos valores a las letras proposicionales. Como una valuación queda definida por el valor que asigna a las letras proposicionales, se concluye que hay una única valuación tal que $v(\Gamma) = 1$.

Aplicando la caracterización semántica de la completitud, se deduce que Γ es completo.