Examen de Lógica

11 de Agosto de 2020

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Considere el siguiente conjunto inductivo L_1.

I $p_i \in L_1$

II Si $\alpha, \beta \in L_1$ entonces $((\neg\alpha) \to \beta) \in L_1$

a. Defina una función $F : L_1 \to \texttt{PROP}_\vee$ siguiendo el esquema de recursión primitiva tal que $F(\alpha)$ $\texttt{eq}$ α. (Recuerde que $\texttt{PROP}_\vee$ es el subconjunto de $\texttt{PROP}$ que tiene sólo el conectivo $\vee$).

b. Demuestre por inducción que la función cumple $F(\alpha)$ $\texttt{eq}$ α.

c. Probar que para cualquier $\alpha \in L_1$ existe una valuación v tal que $v(\alpha) = 1$.

Bosquejo de solución

a.

$$\begin{array}{ll} F : L_1 \to \texttt{PROP}_\vee & \\ F(p_i) & = p_i \\ F((\neg\alpha) \to \beta) & = (F(\alpha) \vee F(\beta)) \end{array}$$

b. Demostraremos la propiedad usando el PIP para L_1:

Identificación de la propiedad: $P(\alpha) : F(\alpha)$ $\texttt{eq}$ α

Paso Base

T) $P(p_i) : F(p_i)$ $\texttt{eq}$ p_i

Demo)

$$\begin{array}{l} F(p_i) \texttt{ eq } p_i \\ \Leftrightarrow \text{(Def. de } F\text{)} \\ p_i \texttt{ eq } p_i \end{array}$$

Por lo tanto se cumple la tesis.

Paso Inductivo

H1) $P(\alpha) : F(\alpha)$ $\texttt{eq}$ α

H2) $P(\beta) : F(\beta) \texttt{ eq } \beta$
T) $P((\neg\alpha) \to \beta) : F((\neg\alpha) \to \beta) \texttt{ eq } ((\neg\alpha) \to \beta)$
Demo)

$$
\begin{aligned}
& F((\neg\alpha) \to \beta) \texttt{ eq } ((\neg\alpha) \to \beta) \\
& \Leftrightarrow \text{(Def. de } F\text{)} \\
& (F(\alpha) \vee F(\beta)) \texttt{ eq } ((\neg\alpha) \to \beta) \\
& \Leftrightarrow \text{(Equivalentes)} \\
& (F(\alpha) \vee F(\beta)) \texttt{ eq } ((\neg\neg\alpha) \vee \beta) \\
& \Leftrightarrow \text{(Equivalentes)} \\
& (F(\alpha) \vee F(\beta)) \texttt{ eq } (\alpha \vee \beta) \\
& \Leftrightarrow \text{(H1)} \\
& (\alpha \vee F(\beta)) \texttt{ eq } (\alpha \vee \beta) \\
& \Leftrightarrow \text{(H2)} \\
& (\alpha \vee \beta) \texttt{ eq } (\alpha \vee \beta)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se cumple la tesis.

Como nos encontramos en las hipótesis del PIP para L_1, concluimos que:

$$(\bar{\forall}\alpha \in L_1) F(\alpha) \texttt{ eq } \alpha$$

c. Demostraremos la propiedad usando el PIP para L_1:

Identificación de la propiedad: $P(\alpha) : (\bar{\exists} v) v(\alpha) = 1$

Paso Base

T) $P(p_i) : (\bar{\exists} v) v(p_i) = 1$
Demo)
Tomamos como testigo la valuación que asigna 1 a todas las letras proposicionales.
Esta valuación hace verdadera a p_i.
Por lo tanto se cumple la tesis.

Paso Inductivo

H1) $P(\alpha) : (\bar{\exists} v) v(\alpha) = 1$
H2) $P(\beta) : (\bar{\exists} v) v(\beta) = 1$
T) $P((\neg\alpha) \to \beta) : (\bar{\exists} v) v((\neg\alpha) \to \beta) = 1$
Demo)
Por H1 existe v_1 tal que $v_1(\alpha) = 1$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
& v_1(\alpha) = 1 \\
& \Rightarrow \text{(aritmética)} \\
& max(v_1(\alpha), v_1(\beta)) = 1 \\
& \Rightarrow \text{(aritmética)} \\
& max(1 - (1 - v_1(\alpha)), v_1(\beta)) = 1 \\
& \Rightarrow \text{(Def. de valuación)} \\
& max(1 - v_1(\neg\alpha), v_1(\beta)) = 1 \\
& \Rightarrow \text{(Def. de valuación)} \\
& v_1((\neg\alpha) \to \beta) = 1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se cumple la tesis, tomando v_1 como testigo.

Como nos encontramos en las hipótesis del PIP para L_1, concluimos que:

$$(\bar{\forall}\alpha \in L_1)(\bar{\exists}v)v(\alpha) = 1$$

Ejercicio 2 (25 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden del tipo. $< 1; 1; 0 >$ Considere las siguientes fórmulas:

$$\varphi := (\forall x)(P(x) \to (\exists y)f(y) =' x)$$
$$\psi := (\exists x)(((\forall y)\neg f(y) =' x) \land P(x))$$

a. Encuentre de ser posible $\mathcal{M}_1$ del tipo adecuado tal que $\mathcal{M}_1 \models \varphi$ Justifique.
b. Encuentre de ser posible $\mathcal{M}_2$ del tipo adecuado tal que $\mathcal{M}_2 \models \psi$ Justifique.
c. ¿El conjunto $\{\varphi, \psi\}$ es inconsistente? Justifique.
d. Encuentre de ser posible $\mathcal{M}_3$ del tipo adecuado tal que $\mathcal{M}_3 \models \{\varphi, \psi\}$ Justifique.

Bosquejo de solución

a. La afirmación es verdadera. Elegimos $\mathcal{M}_1 =< \{\square\}, \{\square\}, identidad >$
T) $\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(P(x) \to (\exists y)f(y) =' x)$
Dem.

$$\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(P(x) \to (\exists y)f(y) =' x) \overset{(2.4.5)}{\Leftrightarrow}$$
$$\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}_1|\, \mathcal{M}_1 \models (P(\bar{a}) \to (\exists y)f(y) =' \bar{a}) \overset{(2.4.5)}{\Leftrightarrow}$$
$$\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}_1|\, si\ \mathcal{M}_1 \models P(\bar{a}) \text{ entonces } \mathcal{M}_1 \models (\exists y)f(y) =' \bar{a}) \overset{(2.4.5)}{\Leftrightarrow}$$
$$\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}_1|\, si\ \mathcal{M}_1 \models P(\bar{a}) \text{ entonces } (\bar{\exists}b) \in |\mathcal{M}_1|\, \mathcal{M}_1 \models f(\bar{b}) =' \bar{a} \overset{(v^{\mathcal{M}_1})}{\Leftrightarrow}$$
$$\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}_1|\, si\ a \in \{\square\} \text{ entonces } (\bar{\exists}b) \in |\mathcal{M}_1|\, identidad(b) = a$$

Esto se cumple para $a = \square$, es decir para todo elemento del conjunto ya que el conjunto solo tiene un elemento.

■

b. La afirmación es verdadera. Elegimos $\mathcal{M}_2 =< \{\square, \bullet\}, \{\square, \bullet\}, \{(\square, \bullet), (\bullet, \bullet)\} >$
T) $\mathcal{M}_2 \models (\exists x)(((\forall y)\neg f(y) =' x) \land P(x))$
Dem.

$$\mathcal{M}_2 \models (\exists x)(((\forall y)\neg f(y) =' x) \land P(x)) \overset{(2.4.5)}{\Leftrightarrow}$$
$$(\bar{\exists}a) \in |\mathcal{M}_2|\, \mathcal{M}_2 \models ((\forall y)\neg f(y) =' \bar{a}) \land P(\bar{a}) \overset{(2.4.5)}{\Leftrightarrow}$$
$$(\bar{\exists}a) \in |\mathcal{M}_2|\, \mathcal{M}_2 \models ((\forall y)\neg f(y) =' \bar{a}) \text{ y } \mathcal{M}_2 \models P(\bar{a}) \overset{(2.4.5)}{\Leftrightarrow}$$
$$(\bar{\exists}a) \in |\mathcal{M}_2|\, \bar{\forall}b \in |\mathcal{M}_2|\, \mathcal{M}_2 \models \neg f(\bar{b}) =' \bar{a} \text{ y } \mathcal{M}_2 \models P(\bar{a}) \overset{(2.4.5)}{\Leftrightarrow}$$
$$(\bar{\exists}a) \in |\mathcal{M}_2|\, \bar{\forall}b \in |\mathcal{M}_2|\, \mathcal{M}_2 \not\models f(\bar{b}) =' \bar{a} \text{ y } \mathcal{M}_2 \models P(\bar{a}) \overset{(v^{\mathcal{M}_1})}{\Leftrightarrow}$$
$$(\bar{\exists}a) \in |\mathcal{M}_2|\, \bar{\forall}b \in |\mathcal{M}_2|\, f(b) \neq a \text{ y } a \in \{\square, \bullet\} \overset{(\text{testigo } \square)}{\Leftrightarrow}$$
$$(\bar{\exists}a), a = \square, \bar{\forall}b \in |\mathcal{M}_2|\, f(b) \neq \square \text{ y } \square \in \{\square, \bullet\}$$

Esto se cumple utilizando a $\square$ como testigo.

■

c. El conjunto $\{\varphi, \psi\}$ es inconsistente, lo demostraremos construyendo una derivacíon que pruebe $\{\varphi, \psi\} \vdash \bot$.

$$\dfrac{(\exists x)(((\forall y)\neg f(y) =' x) \land P(x))) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(P(x) \to (\exists y)f(y) =' x)}{(P(x) \to (\exists y)f(y) =' x)}\,E\forall(*3) \quad \dfrac{[((\forall y)\neg f(y) =' x) \land P(x))]^1}{P(x)}\,E\land_2}{(\exists y)f(y) =' x}\,E\to \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[((\forall y)\neg f(y) =' x) \land P(x))]^1}{(\forall y)\neg f(y) =' x)}\,E\land_1}{\neg f(y) =' x}\,E\forall(*4) \quad [f(y) =' x]^2}{\bot}\,E\neg}{\bot}\,E\exists_{(2)(*2)}}{\bot}\,E\exists_{(1)(*1)}$$

$(*^1) x \notin FV(\{\bot, (\forall x)(P(x) \to (\exists y)f(y) =' x)\})$

$(*^2) y \notin FV(\{\bot, ((\forall y)\neg f(y) =' x) \land P(x)\})$

$(*^3) x$ esta libre para x en $(P(x) \to (\exists y)f(y) =' x)$

$(*^4) y$ esta libres para y en $\neg f(y) =' x$

d. Por lo visto en la parte anterior, el conjunto $\{\varphi, \psi\}$ es inconsistente. Por lo tanto no existe modelo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \{\varphi, \psi\}$

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguientes juicios. En ningún caso son válidas consideraciones semánticas:

a. $\neg\varphi \lor \beta \vdash (\neg\beta \lor \alpha) \to (\varphi \to \alpha)$

b. $(\exists x)(\exists y)P(x, y) \vdash (\forall x)(\neg P(x, x)) \to (\exists x)(\exists y)\neg x =' y$

Bosquejo de solución

a.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\beta \lor \alpha]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\varphi \lor \beta \qquad \dfrac{[\neg\varphi]^4 \quad [\varphi]^2}{\bot}\,E\neg \qquad \dfrac{[\neg\beta]^3 \quad [\beta]^4}{\bot}\,E\neg}{\bot}\,E\lor_{(4)}}{\alpha}\,E\bot \qquad [\alpha]^3}{\alpha}\,E\lor_{(3)}}{\varphi \to \alpha}\,I\to_{(2)}}{(\neg\beta \lor \alpha) \to (\varphi \to \alpha)}\,I\to_{(1)}$$

b.

$$\dfrac{\dfrac{(\exists x)(\exists y)P(x, y) \qquad \dfrac{[(\exists y)P(x, y)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x =' y]^4 \qquad \dfrac{[(\forall x)(\neg P(x, x))]^1}{\neg P(x, x)}\,E\forall_{(*6)}}{\neg P(x, y)}\,RI4*_{(*5)} \qquad [P(x, y)]^3}{\bot}\,E\neg}{\neg x =' y}\,I\neg_{(4)}}{(\exists y)\neg x =' y}\,I\exists_{(*4)}}{(\exists x)(\exists y)\neg x =' y}\,I\exists_{(*3)}}{(\exists x)(\exists y)\neg x =' y}\,E\exists_{(3)(*2)}}{(\exists x)(\exists y)\neg x =' y}\,E\exists_{(2)(*1)}}{(\forall x)(\neg P(x, x)) \to (\exists x)(\exists y)\neg x =' y}\,I\to_{(1)}$$

(∗1) $x \notin FV(\{(\exists x)(\exists y)\neg x =' y, (\forall x)(\neg P(x,x))\})$

(∗2) $y \notin FV(\{(\exists x)(\exists y)\neg x =' y, (\forall x)(\neg P(x,x))\})$

(∗3) x esta libre para x en $(\exists y)\neg x =' y$

(∗4) y esta libre para y en $\neg x =' y$

(∗5) x, y estan libres para z en $\neg P(x,z)$

(∗6) x esta libre para x en $\neg P(x,x)$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Considere el siguiente conjunto:

- $\Gamma = \{p_i \leftrightarrow p_{i+2} \mid i \in \mathbb{N}\}$

a. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificando en cada caso.
   I. Existe una teoría T tal que $\Gamma \cap T = \emptyset$.
   II. Existe una teoría T tal que $CONS(\Gamma) \cap T = \emptyset$.

b. I. Calcule cuantas valuaciones hacen verdaderas a todas las fórmulas de $\Gamma \cup \{p_0\}$
   II. Calcule cuantas valuaciones que hacen verdaderas a todas las fórmulas de Γ.
   III. De si es posible un $\varphi \in PROP$ tal que $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es completo. Justifique. De no ser posible también justifique.

Bosquejo de solución

a. I. La afirmación es **verdadera**. Considero $T = \text{Cons}(\emptyset)$.
   El conjunto T es teoría puesto que esta definido como Cons.
   Por otro lado, T es el conjunto de todos las fórmulas α que cumplen $\vdash \alpha$.
   Sea $\varphi \in \Gamma$. Entonces $\varphi \equiv p_i \leftrightarrow p_{i+2}$ para algún $i \in \mathbb{N}$.

   Sea v la valuación que cumple $v(p_j) = 1 \Leftrightarrow j \neq i$.

   Por definición de valuación: $v(p_i \leftrightarrow p_{i+2}) = 1 \Leftrightarrow v(p_i) = v(p_{i+2})$. Pero por definición de v: $v(p_i) = 0$ y $v(p_{i+2}) = 1$. Por lo tanto $v(\alpha) = 0$ y φ no es tautología. Por completitud, φ no es un teorema y por lo tanto no pertenece a T.

   Queda probado que $(\bar{\forall}\varphi \in \Gamma) : \varphi \notin T$ y por lo tanto $\Gamma \cap T = \emptyset$.

   II. La afirmación es falsa. La intersección de dos teorías no puede ser vacía ya que los teoremas pertenecen a todas las teorías (puesto que se derivan de cualquier conjunto).

b. I. Considero una valuación v tal que $v(\Gamma \cup \{p_0\}) = 1$.

   Se cumplirá:

   - $v(p_0) = 1$
   - $(\bar{\forall} i \in \mathbb{N})\ v(p_i \leftrightarrow p_{i+2}) = 1$

De lo último concluimos que: $(\bar{\forall} i \in \mathbb{N})\ v(p_i) = v(p_{i+2})$.

Partiendo de $v(p_0) = 1$ obtenemos que $v(p_2) = 1$ y aplicando sucesivamente el mismo razonamiento llegamos a que $(\bar{\forall} k \in \mathbb{N})\ v(p_{2k}) = 1$.

Con respecto a las letras proposicionales de índice impar no podemos deducir su valor en v pero siguiendo el mismo razonamiento, deben ser todos iguales entre sí. Por lo tanto existen dos valuaciones posibles según se le asigne 0 o 1 a las letras proposicionales con índice impar.

II. De acuerdo con lo visto en la parte anterior, cualquier valuación que asigne 1 a Γ debe asignarle el mismo valor a todas las letras proposicionales con índice par y el mismo valor a las letras con índice impar. Esto nos da 4 posibles valuaciones:

- $(\bar{\forall} i \in \mathbb{N})\ v_1(p_i) = 0$
- $(\bar{\forall} i \in \mathbb{N})\ v_2(p_{2i}) = 0$ y $v_2(p_{2i+1}) = 1$
- $(\bar{\forall} i \in \mathbb{N})\ v_3(p_{2i}) = 1$ y $v_3(p_{2i+1}) = 0$
- $(\bar{\forall} i \in \mathbb{N})\ v_4(p_i) = 1$

III. Sea $\varphi \equiv p_0 \land p_1$.

Sea v una de las cuatro valuaciones tales que $v(\Gamma) = 1$. Como además se debe cumplir $v(\varphi) = 1$, concluimos que $v(p_0) = v(p_1) = 1$ (por definición de valuación y de φ).

Por lo tanto, la única posibilidad es que $v = v_4$ y tenemos una **única** valuación que asigna 1 a todos los elementos del conjunto $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Luego, por caracterización semántica de completitud: $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es completo.