Examen de Lógica

23 de julio de 2019

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Se considera un lenguaje $\mathcal{L}$ de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle -; -; 0\rangle$ con conectivos $\{\rightarrow, \neg\}$ y con el único cuantificador: $\forall$.

a. **Pruebe:** Si $x_0 \in \mathrm{FV}((\forall x_i)\alpha)$ y x_5 libre para x_0 en $((\forall x_i)\alpha)$ entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

- $x_0 \in \mathrm{FV}(\alpha)$
- $x_0 \neq x_i$
- $x_5 \neq x_i$
- x_5 libre para x_0 en α

b. Se quiere probar que para toda $\varphi \in \mathcal{L}$, se cumple que si $x_0 \in \mathrm{FV}(\varphi)$ y x_5 está libre para x_0 en φ, entonces $x_5 \in \mathrm{FV}(\varphi[{}^{x_5}/_{x_0}])$.

I. Escriba hipótesis y tesis de todos los pasos necesarios para hacer la prueba pedida por inducción en $\mathcal{L}$.

II. Escriba demostraciones completas para los casos correspondientes a

1 Formulas atómicas.

2 Negación: $(\neg\alpha)$

3 Cuantificación: $(\forall x_i)\alpha$ (Sugerencia: Use la parte a.)

c. Muestre que si se quita la condición "x_5 está libre para x_0 en φ", la propiedad anterior ya no se cumple. Se recuerda que la sustitución $\varphi[{}^{x_5}/_{x_0}]$ se realiza de la misma manera independientemente de que se cumpla la condición "libre para".

Recuerde la definición de término libre para una variable en el siguiente caso:

Sean $t \in \mathtt{TERM}, \varphi = (\forall y)\varphi_1$ donde $\varphi_1 \in \mathtt{FORM}$.

t **está libre para** x en φ si se cumple alguna de las siguientes:

a). $x \notin \mathrm{FV}((\forall y)\varphi_1)$

b). $y \notin \mathrm{FV}(t)$ y t está libre para x en φ_1

Bosquejo de solución

a. A partir de los supuestos dados, aplicamos las definiciones y obtenemos:

$x_0 \in \mathrm{FV}((\forall x_i)\alpha)$
$\Leftrightarrow$ (def. FV)
$x_0 \in \mathrm{FV}(\alpha) - \{x_i\}$
$\Leftrightarrow$ (def. de $-$)
$x_0 \in \mathrm{FV}(\alpha)$ y $x_0 \neq x_i$

x_5 libre para x_0 en $(\forall x_i)\alpha$
$\Leftrightarrow$ (def. libre para)
Se cumple alguno de estos dos:
A) $x_i \notin \mathrm{FV}(x_5)$ y x_i libre para x_0 en α
B) $x_0 \notin \mathrm{FV}((\forall x_i)\alpha)$

En la columna de la derecha descartamos la opción B) ya que contradice el supuesto de que $x_0 \in \mathrm{FV}((\forall x_i)\alpha)$. Del caso A) se concluye que $x_i \neq x_5$ y x_i libre para x_0 en α.

b. Consideramos la propiedad:
$\mathcal{P}(\varphi) =$ "Si $x_0 \in \mathrm{FV}(\varphi)$ y x_5 libre para x_0 en φ entonces $x_5 \in \mathrm{FV}(\varphi[x_5/x_0])$"
Los pasos para probar por inducción que $(\bar{\forall}\varphi \in \mathcal{L})\mathcal{P}(\varphi)$ son

Paso Base (T) $x_0 \in \mathrm{FV}(x_i =' x_j)$ y x_5 libre para x_0 en $x_i =' x_j$ entonces $x_5 \in \mathrm{FV}((x_i =' x_j)[x_5/x_0])$.

Demostración Suponemos $(H_1):$ $x_0 \in \mathrm{FV}(x_i =' x_j)$ y $(H_2):$ x_5 libre para x_0 en $x_i =' x_j$. Notar que la hipótesis (H_2) es irrelevante en este caso.

$x_0 \in \mathrm{FV}(x_i =' x_j)$
$\Leftrightarrow$ (def. FV)
$x_0 \in FV(x_i) \cup FV(x_j)$
$\Leftrightarrow$ (unión de conjuntos)
$x_0 = x_i$ o $x_0 = x_j$
$\Rightarrow$ (sustitución, FV)
$x_5 \in \mathrm{FV}(x_i[x_5/x_0])$ o $x_5 \in \mathrm{FV}(x_j[x_5/x_0])$
$\Rightarrow$ (unión de conjuntos)
$x_5 \in \mathrm{FV}(x_i[x_5/x_0]) \cup \mathrm{FV}(x_j[x_5/x_0])$
$\Leftrightarrow$ (FV)
$x_5 \in \mathrm{FV}(x_i[x_5/x_0] =' x_j[x_5/x_0])$
$\Leftrightarrow$ (sustitución)
$x_5 \in \mathrm{FV}((x_i =' x_j)[x_5/x_0])$
$\square$

Caso inductivo 1 Para $\alpha \to \beta$

(H1) $\mathcal{P}(\alpha) =$ "Si $x_0 \in \mathrm{FV}(\alpha)$ y x_5 libre para x_0 en α entonces $x_5 \in \mathrm{FV}(\alpha[x_5/x_0])$"
(H2) $\mathcal{P}(\beta) =$ "Si $x_0 \in \mathrm{FV}(\beta)$ y x_5 libre para x_0 en β entonces $x_5 \in \mathrm{FV}(\beta[x_5/x_0])$"
(T) $\mathcal{P}(\alpha \to \beta) =$ "Si $x_0 \in \mathrm{FV}((\alpha \to \beta))$ y x_5 libre para x_0 en $(\alpha \to \beta)$ entonces $x_5 \in \mathrm{FV}((\alpha \to \beta)[x_5/x_0])$"

Para este caso, no se pide la demostración.

Caso inductivo 2 Para $\neg\alpha$

(H) $\mathcal{P}(\alpha) =$ "Si $x_0 \in \mathrm{FV}(\alpha)$ y x_5 libre para x_0 en α entonces $x_5 \in \mathrm{FV}(\alpha[x_5/x_0])$'
(T) $\mathcal{P}(\neg\alpha) =$ "Si $x_0 \in \mathrm{FV}((\neg\alpha))$ y x_5 libre para x_0 en $(\neg\alpha)$ entonces $x_5 \in \mathrm{FV}((\neg\alpha)[x_5/x_0])$"

Demostración Suponemos $x_0 \in \mathrm{FV}((\neg\alpha))$ y x_5 libre para x_0 en $(\neg\alpha)$.

$x_0 \in \mathrm{FV}(\neg\alpha)$
$\Leftrightarrow$ (def. FV)
$x_0 \in \mathrm{FV}(\alpha)$

x_5 libre para x_0 en $(\neg\alpha)$
$\Leftrightarrow$ (def. libre para)
x_5 libre para x_0 en α

$\Rightarrow$ (Hipótesis inductiva)
$x_5 \in \mathrm{FV}(\alpha[{}^{x_5}/_{x_0}])$
$\Leftrightarrow$ (def. de FV)
$x_5 \in \mathrm{FV}(\neg(\alpha[{}^{x_5}/_{x_0}]))$
$\Leftrightarrow$ (sustitución)
$x_5 \in \mathrm{FV}((\neg\alpha)[{}^{x_5}/_{x_0}])$
$\square$

Caso inductivo 3 Para $(\forall x_i)\alpha$

(H) $\mathcal{P}(\alpha) =$ "Si $x_0 \in \mathrm{FV}(\alpha)$ y x_5 libre para x_0 en α entonces $x_5 \in \mathrm{FV}(\alpha[{}^{x_5}/_{x_0}])$"

(T) $\mathcal{P}((\forall x_i)\alpha) =$ "Si $x_0 \in \mathrm{FV}((\forall x_i)\alpha)$ y x_5 libre para x_0 en $(\forall x_i)\alpha$ entonces $x_5 \in \mathrm{FV}(((\forall x_i)\alpha)[{}^{x_5}/_{x_0}])$"

Demostración Suponemos $x_0 \in \mathrm{FV}((\forall x_i)\alpha)$ y x_5 libre para x_0 en $(\forall x_i)\alpha$. Aplicando lo demostrado en parte a) concluímos:

- $x_0 \in \mathrm{FV}(\alpha)$ (1)
- $x_0 \neq x_i$
- $x_5 \neq x_i$
- x_5 libre para x_0 en α (2)

A partir de (1) y (2) podemos aplicar la hipótesis inductiva y concluir: $x_5 \in \mathrm{FV}(\alpha[{}^{x_5}/_{x_0}])$. Completamos la prueba de la siguiente manera:

$x_5 \in \mathrm{FV}(\alpha[{}^{x_5}/_{x_0}])$
$\Rightarrow$ ($x_i \neq x_5$)
$x_5 \in \mathrm{FV}(\alpha[{}^{x_5}/_{x_0}]) - \{x_i\}$
$\Leftrightarrow$ (def. de FV)
$x_5 \in \mathrm{FV}((\forall x_i)(\alpha[{}^{x_5}/_{x_0}]))$
$\Rightarrow$ (sustitución, $x_0 \neq x_i$)
$x_5 \in \mathrm{FV}(((\forall x_i)\alpha)[{}^{x_5}/_{x_0}])$
$\square$

c. Sea $\varphi = (\forall x_5)x_0 =' x_0$. Vemos que $x_0 \in \mathrm{FV}(\varphi)$ pero $x_5 \notin \mathrm{FV}(\varphi[{}^{x_5}/_{x_0}])$ ya que:

- $\mathrm{FV}(\varphi) = \{x_0\}$
- $\mathrm{FV}(((\forall x_5)x_0 =' x_0)[{}^{x_5}/_{x_0}]) = \mathrm{FV}((\forall x_5)x_5 =' x_5) = \emptyset$

Ejercicio 2 (25 puntos)

Sean un lenguaje de primer orden de tipo de similaridad $\langle 2; -; 0\rangle$ y las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= (\forall x)P(x,x)\\
\varphi_2 &= (\forall x)(\exists y)P(x,y)\\
\varphi_3 &= (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to x =' y)\\
\varphi_4 &= (\forall x)(\forall y)x =' y
\end{aligned}$$

Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. $\varphi_1 \not\models \varphi_3$

b. $\{\neg\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4\}$ es inconsistente

c. Existe una estructura $\mathcal{M}$ de tipo $\langle 2; -; 0\rangle$, tal que $|\mathcal{M}| = \{\bullet\}$ y $\mathcal{M} \models \neg\varphi_3$.

Bosquejo de solución

a. $\varphi_1 \not\models \varphi_3$

VERDADERO.

$$\begin{array}{l} \varphi_1 \not\models \varphi_3 \\ \Leftrightarrow \text{ (Def. } \not\models) \\ (\bar{\exists}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models \varphi_1 \text{ y } \mathcal{M} \not\models \varphi_3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} \models \varphi_1 \\ \Leftrightarrow \text{ (Def. } \varphi_1) \\ \mathcal{M} \models (\forall x)P(x,x) \\ \Leftrightarrow \text{ (2.4.5 y sustitución y } v^{\mathcal{M}}) \\ (\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)((a,a) \in R) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} \not\models \varphi_3 \\ \Leftrightarrow \text{ (Def. } \varphi_3) \\ \mathcal{M} \not\models (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to x =' y) \\ \Leftrightarrow \text{ (contrarrecíproco 2.4.5 y sustitución x2)} \\ (\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \not\models P(\bar{a},\bar{b}) \to \bar{a} =' \bar{b} \\ \Leftrightarrow \text{ (contrarrecíproco 2.4.5 y } v^{\mathcal{M}}) \\ (\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)((a,b) \in R \text{ y } a \neq b) \end{array}$$

Sea $\mathcal{M}_1 = \langle\{\bullet, \circ\}, R\rangle$, con $R = \{(\bullet,\bullet),\ (\circ,\circ),\ (\circ,\bullet)\}$.
Vamos a probar $\mathcal{M}_1 \models \varphi_1$ y $\mathcal{M}_1 \not\models \varphi_3$.

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_1 \models \varphi_1 \\ \Leftrightarrow \text{ (Desarrollo anterior)} \\ (\bar{\forall} a \in \{\bullet,\circ\})((a,a) \in R) \\ \text{Y esto se cumple para } a = \circ \text{ y } a = \bullet \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_1 \not\models \varphi_3 \\ \Leftrightarrow \text{ (Desarrollo anterior)} \\ (\bar{\exists} a \in \{\bullet,\circ\})(\bar{\exists} b \in \{\bullet,\circ\})((a,b) \in R \text{ y } a \neq b) \\ \text{Sean } a = \circ \text{ y } b = \bullet \Rightarrow (a,b) \in R \text{ y } a \neq b \end{array}$$

b. $\{\neg\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4\}$ es inconsistente

VERDADERO.

Vamos a probar $\{\neg\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4\} \vdash \bot$ lo que implica que el conjunto es inconsistente.

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg(\forall x)P(x,x)$}
\AxiomC{$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$}
\RightLabel{$E\forall^{*3}$}
\UnaryInfC{$(\exists y)P(x,y)$}
\AxiomC{$[P(x,y)]^{(1)}$}
\AxiomC{$(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to x =' y)$}
\RightLabel{$E\forall^{*6}$}
\UnaryInfC{$(\forall y)(P(x,y) \to x =' y)$}
\RightLabel{$E\forall^{*5}$}
\UnaryInfC{$P(x,y) \to x =' y$}
\AxiomC{$[P(x,y)]^{(1)}$}
\RightLabel{$E\to$}
\BinaryInfC{$x =' y$}
\RightLabel{$RI2$}
\UnaryInfC{$y =' x$}
\RightLabel{$RI4^{(*_4)}$}
\BinaryInfC{$P(x,x)$}
\RightLabel{$E\exists^{*2}_{(1)}$}
\BinaryInfC{$P(x,x)$}
\RightLabel{$I\forall^{*1}$}
\UnaryInfC{$(\forall x)P(x,x)$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\end{prooftree}$$

$(*_1)$ $x \notin FV(\{\neg(\forall x)P(x,x), (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to x =' y), (\forall x)(\exists y)P(x,y)\})$

$(*_2)$ $y \notin FV(\{(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to x =' y), P(x,x)\})$

($*_3$) x libre para x en $(\exists y)P(x,y)$

($*_4$) y libre para z_1 en $P(x,z_1)$ y x libre para z_1 en $P(x,z_1)$

($*_5$) y libre para y en $P(x,y) \to x =' y$

($*_6$) x libre para x en $(\forall y)(P(x,y) \to x =' y)$

c. Existe una estructura $\mathcal{M}$ de tipo $\langle 2;0;0\rangle$, tal que $|\mathcal{M}| = \{\bullet\}$ y $\mathcal{M} \models \neg\varphi_3$.
FALSO.

Sea $\mathcal{M}_1 = \langle \{\bullet\}, R\rangle$ con R cualquier relación de tipo adecuado sobre el conjunto $\{\bullet\}$.

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_1 \models \neg\varphi_3 \\ \Leftrightarrow \text{ (Desarrollo de parte a)} \\ (\bar{\exists} a \in \{\bullet\})(\bar{\exists} b \in \{\bullet\})((a,b) \in R \text{ y } a \neq b) \end{array}$$

Como $|\mathcal{M}_1| = \{\bullet\}$ tiene un único elemento:

$$\begin{array}{l} (\bar{\forall} a \in \{\bullet\})(\bar{\forall} b \in \{\bullet\}) a = b \\ \Rightarrow \text{ (Se cumple la parte derecha del `o')} \\ (\bar{\forall} a \in \{\bullet\})(\bar{\forall} b \in \{\bullet\})((a,b) \notin R \text{ o } a = b) \\ \Rightarrow \\ \text{no se cumple } (\bar{\exists} a \in \{\bullet\})(\bar{\exists} b \in \{\bullet\})((a,b) \in R \text{ y } a \neq b) \end{array}$$

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguientes juicios. En ningún caso son válidas consideraciones semánticas:

a. $(\exists x)(\forall y) f(x,y) =' y \vdash (\forall y)(\forall z)(\exists x)(P(y,z) \to P(y,x))$

b. $\vdash (\forall x)(\neg(\exists y) f(x) =' y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\neg f(x) =' y)$

Bosquejo de solución

a. $(\exists x)(\forall y) f(x,y) =' y \vdash (\forall y)(\forall z)(\exists x)(P(y,z) \to P(y,x))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P(y,z)]^1}{P(y,z) \to P(y,z)}\, I\to (1)}{(\exists x)(P(y,z) \to P(y,x))}\, I\exists(*1)}{(\forall z)(\exists x)(P(y,z) \to P(y,x))}\, I\forall(*2)}{(\forall y)(\forall z)(\exists x)(P(y,z) \to P(y,x))}\, I\forall(*3)$$

(*1) z esta libre para x en $P(y,z) \to P(y,x)$

(*2) $z \notin FV(\emptyset)$

(*3) $y \notin FV(\emptyset)$

b. $\vdash (\forall x)(\neg(\exists y)f(x) =' y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\neg f(x) =' y)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall x)(\neg(\exists y)f(x) =' y)]^2}{\neg(\exists y)f(x) =' y}\,E\forall(*1) \qquad \dfrac{\dfrac{}{f(x) =' f(x)}\,RI1}{(\exists y)f(x) =' y}\,I\exists(*2)}{\bot}\,E\neg}{(\exists x)(\forall y)(\neg f(x) =' y)}\,E\bot \qquad \dfrac{\dfrac{[(\exists x)(\forall y)(\neg f(x) =' y)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[(\forall y)(\neg f(x) =' y)]^1}{\neg f(x) =' f(x)}\,E\forall(*3) \qquad \dfrac{}{f(x) =' f(x)}\,RI1}{\bot}\,E\neg}{\bot}\,E\exists(*4)(1)}{(\forall x)(\neg(\exists y)f(x) =' y)}\,E\bot}{(\forall x)(\neg(\exists y)f(x) =' y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\neg f(x) =' y)}\,E\leftrightarrow(2)$$

(*1) x libre para x en $\neg(\exists y)f(x) =' y$

(*2) $f(x)$ libre para y en $f(x) =' y$

(*3) $f(x)$ libre para y en $\neg f(x) =' y$

(*4) $x \notin FV(\bot)$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 1; -; 2\rangle$ y la fórmula $\varphi = (\exists y)(\forall x)x =' y$

Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas. Justifique sus respuestas.

a. $\textsc{Cons}(\{P_1(c_1)\}) \cap \textsc{Cons}(\{P_1(c_2)\}) = Th(Mod(\emptyset))$

b. $P_1(c_1) \leftrightarrow P_1(c_2) \in Th(\langle\{1\}, R, 1, 1\rangle)$ donde R es cualquier relación posible.

c. $(\forall x)P_1(x) \notin \textsc{Cons}(\{\varphi\})$

d. $Th(\langle\{1\}, \{1\}, 1, 1\rangle) \subseteq \textsc{Cons}(\{\varphi\})$

Bosquejo de solución

a. $\textsc{Cons}(\{P_1(c_1)\}) \cap \textsc{Cons}(\{P_1(c_2)\}) = Th(Mod(\emptyset))$
FALSA.
$Th(Mod(\emptyset))$
$=$ (por propiedad del práctico)
$\textsc{Cons}(\emptyset)$
$=$ (def. $\textsc{Cons}$)
$\{\alpha \in SENT | \vdash \alpha\}$

Vamos a probar $\textsc{Cons}(\{P_1(c_1)\}) \cap \textsc{Cons}(\{P_1(c_2)\}) \not\subseteq \textsc{Cons}(\emptyset)$.
Es decir, $(\exists \alpha \in \textsc{Cons}(\{P_1(c_1)\}) \cap \textsc{Cons}(\{P_1(c_2)\}))(\alpha \notin \textsc{Cons}(\emptyset))$

Sea $\alpha = P_1(c_1) \vee P_1(c_2)$.

En primer lugar mostremos $\alpha \in \textsc{Cons}(\{P_1(c_1)\}) \cap \textsc{Cons}(\{P_1(c_2)\})$

$P_1(c_1) \vee P_1(c_2) \in \textsc{Cons}(\{P_1(c_1)\}) \cap \textsc{Cons}(\{P_1(c_2)\})$
$\Leftrightarrow$ (def. de intersección de conjuntos)
$P_1(c_1) \vee P_1(c_2) \in \{P_1(c_1)\})$ y $P_1(c_1) \vee P_1(c_2) \in \textsc{Cons}(\{P_1(c_2)\})$
$\Leftrightarrow$ (def. $\textsc{Cons}$)
$P_1(c_1) \vdash P_1(c_1) \vee P_1(c_2)$ y $P_1(c_2) \vdash P_1(c_1) \vee P_1(c_2)$

Lo anterior queda demostrado por las siguientes derivaciones:

$$\dfrac{P_1(c_1)}{P_1(c_1) \vee P_2(c_2)}\ I\vee_1 \quad \Bigg| \quad \dfrac{P_1(c_2)}{P_1(c_1) \vee P_2(c_2)}\ I\vee_2$$

Resta probar $\alpha \notin \textsc{Cons}(\emptyset)$

$P_1(c_1) \vee P_1(c_2) \notin \textsc{Cons}(\emptyset)$
$\Leftrightarrow$ (def. $\textsc{Cons}(\emptyset)$)
$\nvdash P_1(c_1) \vee P_1(c_2)$
$\Leftrightarrow$ (corr y completitud)
$\not\models P_1(c_1) \vee P_1(c_2)$
$\Leftrightarrow$ (def. $\not\models$)
$(\bar{\exists}\mathcal{M})(\mathcal{M} \not\models P_1(c_1) \vee P_1(c_2))$

Sea $\mathcal{M}_1 = \langle\{\bullet\}, \emptyset, \bullet, \bullet\rangle$

$\mathcal{M}_1 \not\models P_1(c_1) \vee P_1(c_2)$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5, $v^{\mathcal{M}_1}$ y $\_^{\mathcal{M}_1}$)
$\bullet \notin \emptyset$ y $\bullet \notin \emptyset$ lo que se cumple

b. $P_1(c_1) \leftrightarrow P_1(c_2) \in Th(\langle\{1\}, R, 1, 1\rangle)$ donde R es cualquier relación posible.
VERDADERO.
Sea $\mathcal{M} = \langle\{1\}\, R, 1, 1\rangle$ con R cualquier relación posible sobre $\{1\}$.
Vamos a probar $\mathcal{M} \models P_1(c_1) \leftrightarrow P_1(c_2)$ y por lo tanto $P_1(c_1) \leftrightarrow P_1(c_2) \in Th(\mathcal{M})$.

$\mathcal{M} \models P_1(c_1) \leftrightarrow P_1(c_2)$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5, $v^{\mathcal{M}_1}$ y $\_^{\mathcal{M}_1}$)
$1 \in R \Leftrightarrow 1 \in R$

Observar que o bien $R = \emptyset$ o bien $R = \{1\}$.

c. $(\forall x)P_1(x) \notin \textsc{Cons}(\{\varphi\})$
VERDADERO.

$(\forall x)P_1(x) \notin \textsc{Cons}(\{\varphi\})$
$\Leftrightarrow$ (def. φ)
$(\forall x)P_1(x) \notin \textsc{Cons}(\{(\exists y)(\forall x)x =' y\})$
$\Leftrightarrow$ (def. de $\textsc{Cons}$)
$(\exists y)(\forall x)x =' y \nvdash (\forall x)P_1(x)$
$\Leftrightarrow$ (corrección y completitud)
$(\exists y)(\forall x)x =' y \not\models (\forall x)P_1(x)$
$\Leftrightarrow$ (def. $\not\models$)
$(\bar{\exists}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models (\exists y)(\forall x)x =' y$ y $\mathcal{M} \not\models (\forall x)P_1(x))$

Sea $\mathcal{M}_1 = \langle\{1\}, \emptyset, 1, 1\rangle$. Vamos a probar $\mathcal{M}_1 \models (\exists y)(\forall x)x =' y$ y $\mathcal{M}_1 \not\models (\forall x)P_1(x))$

$\mathcal{M}_1 \models (\exists y)(\forall x)x =' y$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 y sustitución x2 y $v^{\mathcal{M}_1}$)
$(\bar{\exists}a \in \{1\})(\bar{\forall}b \in \{1\})(a = b)$
Y esto se cumple para $a = b = 1$
Que es el único elemento del universo

$\mathcal{M}_1 \not\models (\forall x)P_1(x))$
$\Leftrightarrow$ (contrarrecíproco 2.4.5 y sustitución y $v_1^{\mathcal{M}}$)
$(\bar{\exists}a \in \{1\})(a \notin \emptyset)$
Y esto se cumple para $a = 1$
Que es el único elemento del universo

d. $Th(\langle\{1\},\{1\},1,1\rangle) \subseteq \textsc{Cons}(\{\varphi\})$
FALSO.

Llamemos $\langle\{1\},\{1\},1,1\rangle = \mathcal{M}$
$Th(\{\mathcal{M}\}) \not\subseteq \textsc{Cons}(\{\varphi\}) \Leftrightarrow (\bar{\exists}\alpha \in Th(\{\mathcal{M}\}))(\alpha \notin \textsc{Cons}(\{\varphi\}))$.

Sea $\alpha = (\forall x)P_1(x)$. Hay que probar $(\forall x)P_1(x) \in Th(\{\mathcal{M}\})$ y $(\forall x)P_1(x) \notin \textsc{Cons}(\{\varphi\})$.

En la parte c se probó $(\forall x)P_1(x) \notin \textsc{Cons}(\{\varphi\})$, por lo que resta probar $(\forall x)P_1(x) \in Th(\{\mathcal{M}\})$.

$(\forall x)P_1(x) \in Th(\{\mathcal{M}\})$
$\Leftrightarrow$ (def. de Th)
$\mathcal{M} \models (\forall x)P_1(x)$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 y sustitución y $v^{\mathcal{M}}$)
$(\bar{\forall} a \in \{1\})(a \in \{1\})$
Y esto se cumple para $a = 1$
Que es el único elemento del universo