Examen de Lógica

5 de febrero de 2019

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Sea P el conjunto de las letras proposicionales p_i con $i \in \mathcal{N}$, y X el conjunto de los paréntesis $\{), (, \}$.

a. Considere el alfabeto $P \cup X \cup \{\downarrow\}$ con un único conectivo binario $\downarrow$. Defina el lenguaje inductivo $\mathcal{L}$ con ese alfabeto de manera que las palabras de $\mathcal{L}$ sean letras proposicionales o se formen usando el símbolo $\downarrow$ y los paréntesis de forma que, por ejemplo, $(p_1 \downarrow (p_2 \downarrow p_3)) \in \mathcal{L}$.

b. Sea *Val* el conjunto de todas las funciones que asignan valores de verdad a las letras proposicionales. Defina la función $\text{EVAL} : \mathcal{L} \times \mathit{Val} \to \{0, 1\}$ de forma que $\text{EVAL}((\alpha \downarrow \beta), v) = 1$ si y solamente si la evaluación de sus dos argumentos es 0.

c. Considere el alfabeto $P \ \cup \ \{\neg, \vee\}$ con un conectivo unario y uno binario. Definimos el lenguaje inductivo libre $\mathcal{L}'$ con ese alfabeto usando las siguientes reglas:

   I si $p_i \in P$ entonces $p_i \in \mathcal{L}'$

   II si $\alpha, \beta \in \mathcal{L}'$, entonces $\vee\alpha\beta \in \mathcal{L}'$

   III si $\alpha \in \mathcal{L}'$, entonces $\neg\alpha \in \mathcal{L}'$

   Defina la función $\text{EVAL}' : \mathcal{L}' \times \mathit{Val} \to \{0, 1\}$ que trata a los conectivos $\neg$ y $\vee$ de forma habitual.

d. Defina la función $f : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$, de forma que $\text{EVAL}(\alpha, v) = \text{EVAL}'(f(\alpha), v)$.

e. Demuestre que la definición de f es correcta, es decir

$$(\bar{\forall}\alpha \in \mathcal{L})(\bar{\forall}v \in \mathit{Val})(\text{EVAL}(\alpha, v) = \text{EVAL}'(f(\alpha), v))$$

Bosquejo de solución

a. El lenguaje $\mathcal{L}$ contiene sólo el conector binario $\downarrow$ y letras proposicionales, por lo que su definición está dada por las siguientes reglas:

   I Si $p_i \in P$ entonces $p_i \in \mathcal{L}$

   II Si $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ entonces $(\alpha \downarrow \beta)$

b. La definición de EVAL es la siguiente:

$$\begin{aligned} \text{EVAL}(p_i, v) &= v(p_i) \\ \text{EVAL}((\alpha \downarrow \beta), v) &= 1 - max(\text{EVAL}(\alpha, v), \text{EVAL}(\beta, v)) \end{aligned}$$

c. La definición de EVAL$'$ es la siguiente:

$$\begin{aligned} \text{EVAL}'(p_i, v) &= v(p_i) \\ \text{EVAL}'(\vee\alpha\beta, v) &= max(\text{EVAL}'(\alpha, v), \text{EVAL}'(\beta, v)) \\ \text{EVAL}'(\neg\alpha, v) &= 1 - \text{EVAL}'(\alpha, v) \end{aligned}$$

d. La definición de f es la siguiente:

$$\begin{aligned} f(p_i) &= p_i \\ f((\alpha \downarrow \beta), v) &= \neg \vee f(\alpha) f(\beta) \end{aligned}$$

e. T) $(\bar{\forall}\alpha \in \mathcal{L})(\bar{\forall}v \in Val)(\text{EVAL}(\alpha, v) = \text{EVAL}'(f(\alpha), v))$

Dem.

Lo hacemos por inducción sobre $\mathcal{L}$.

- **Paso Base)**

  H) p_i es una variable arbitraria.

  T) $(\bar{\forall}v \in Val)(\text{EVAL}(p_i, v) = \text{EVAL}'(f(p_i), v))$

  Dem.

  Por definición de f, se cumple que:

  $$f(p_i) = p_i$$

  por lo que, nuestra tesis se transforma en:

  $$(\bar{\forall}v \in Val)(\text{EVAL}(p_i, v) = \text{EVAL}'(f(p_i), v))$$

  Por otra parte, por sus respectivas definiciones se cumple que:

  I. $\text{EVAL}(p_i, v) = v(p_i)$

  II. $\text{EVAL}'(p_i, v) = v(p_i)$

  Aplicando estas igualdades, nuestra tesis se trasforma en:

  $$(\bar{\forall}v \in Val)(v(p_i) = v(p_i))$$

  Lo cual es cierto por que para cualquier v tenemos la igualdad de expresiones matemáticas sintácticamente iguales.

  ■

- **Paso Inductivo**

H)

$$\text{EVAL}(\alpha, v) = \text{EVAL}'(f(\alpha), v)$$
$$\text{EVAL}(\beta, v) = \text{EVAL}'(f(\beta), v)$$

T) $(\bar{\forall} v \in \mathit{Val})(\text{EVAL}((\alpha \downarrow \beta), v) = \text{EVAL}'(f((\alpha \downarrow \beta)), v))$

Dem.

Sea v una valuación arbitraria. Para esa valuación se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\text{EVAL}((\alpha \downarrow \beta), v) &= 1 - max(\text{EVAL}(\alpha, v), \text{EVAL}(\beta, v)) && \text{por } f. \quad (1)\\
\text{EVAL}(\alpha, v) &= \text{EVAL}'(f(\alpha), v) && \text{por hip.} \quad (2)\\
\text{EVAL}(\beta, v) &= \text{EVAL}'(f(\beta), v) && \text{por hip.} \quad (3)\\
\text{EVAL}((\alpha \downarrow \beta), v) &= 1 - max(\text{EVAL}'(f(\alpha), v), \text{EVAL}'(f(\beta), v)) && \text{2 y 3 en 1} \quad (4)\\
\text{EVAL}'(\vee f(\alpha) f(\beta), v) &= max(\text{EVAL}'(f(\alpha), v), \text{EVAL}'(f(\beta), v)) && \text{por EVAL}'. \quad (5)\\
\text{EVAL}((\alpha \downarrow \beta), v) &= 1 - \text{EVAL}'(\vee f(\alpha) f(\beta), v) && \text{4 en 5} \quad (6)\\
\text{EVAL}'(\neg \alpha, v) &= 1 - \text{EVAL}'(\alpha, v) && \text{por EVAL}' \quad (7)\\
\text{EVAL}((\alpha \downarrow \beta), v) &= \text{EVAL}'(\neg \vee f(\alpha) f(\beta), v) && \text{7 en 6} \quad (8)\\
f((\alpha \downarrow \beta), v) &= \neg \vee f(\alpha) f(\beta) && \text{por f} \quad (9)\\
\text{EVAL}((\alpha \downarrow \beta), v) &= \text{EVAL}'(f((\alpha \downarrow \beta)), v) && \text{9 en 8} \quad (10)
\end{aligned}$$

La última igualdad, prueba nuestra tesis.

■

Aplicando el principio de inducción primitiva para $\mathcal{L}$ considerando los resultados obtenidos, se puede concluir que se cumple que:

$$(\bar{\forall} \alpha \in \mathcal{L})(\bar{\forall} v \in \mathit{Val})(\text{EVAL}(\alpha, v) = \text{EVAL}'(f(\alpha), v))$$

■

Ejercicio 2 (25 puntos)

Considere un lenguaje con tipo de similaridad $\langle 1, 2; -; 0 \rangle$ con símbolos de predicado P y Q y las siguientes fórmulas:
$\varphi_1 = (\forall x)(P(x) \to Q(x, y))$
$\varphi_2 = (\forall x)(P(x) \to \neg Q(x, y))$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. $(\bar{\exists} \mathcal{M})(\mathcal{M} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2)$.
b. $(\bar{\exists} \mathcal{M})(\mathcal{M} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge (\exists x) P(x))$.
c. $(\bar{\exists} \beta \in \texttt{SENT})(\models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \beta)$.

Bosquejo de solución

a. **Verdadero**.
Sea $\mathcal{M} = \langle \{1\}, \{\}, \{\} \rangle$
Vamos a probar $\mathcal{M} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models (\forall x)(P(x) \to Q(x,y)) \wedge (\forall x)(P(x) \to \neg Q(x,y)) \\
\Leftarrow \text{(clausura)} \\
\mathcal{M} \models (\forall y)((\forall x)(P(x) \to Q(x,y)) \wedge (\forall x)(P(x) \to \neg Q(x,y))) \\
\Leftarrow \text{(2.4.5 y sustitución)} \\
\mathcal{M} \models (\forall x)(P(x) \to Q(x,\bar{1})) \wedge (\forall x)(P(x) \to \neg Q(x,\bar{1})) \\
\Leftarrow \text{(2.4.5)} \\
\mathcal{M} \models (\forall x)(P(x) \to Q(x,\bar{1})) \text{ y } \mathcal{M} \models (\forall x)(P(x) \to \neg Q(x,\bar{1})) \\
\Leftarrow \text{(2.4.5 y sustitución)} \\
\mathcal{M} \models P(\bar{1}) \to Q(\bar{1},\bar{1}) \text{ y } \mathcal{M} \models P(\bar{1}) \to \neg Q(\bar{1},\bar{1}) \\
\Leftarrow \text{(2.4.5)} \\
\mathcal{M} \not\models P(\bar{1}) \\
\Leftarrow \text{(interpretación)} \\
1 \notin \{\},
\end{array}
$$

lo que es verdadero.

b. **Falso**.
Vamos a probar $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge (\exists x)P(x) \vdash \bot$ y por lo tanto no tiene modelo.

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge (\exists x)P(x)}{\varphi_2 \wedge (\exists x)P(x)}\,E\wedge}{(\exists x)P(x)}\,E\wedge
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge (\exists x)P(x)}{\varphi_2 \wedge (\exists x)P(x)}\,E\wedge}{\varphi_2}\,E\wedge}{P(x) \to \neg Q(x,y)}\,E\forall^{*2}
\quad [P(x)]_1
}{\neg Q(x,y)}\,E\to
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge (\exists x)P(x)}{\varphi_1}\,E\wedge}{P(x) \to Q(x,y)}\,E\forall^{*3}
\quad [P(x)]_1
}{Q(x,y)}\,E\to
}{\bot}\,E\neg
}{\bot}\,E\exists_1^{*1}
$$

*1 x no está libre en $\bot$ ni en φ_1, ni en φ_2, ni en $(\exists x)P(x)$.

*2 x está libre para x en $P(x) \to \neg Q(x,y)$

*3 x está libre para x en $P(x) \to Q(x,y)$

c. **Falso**.
Sea $\beta \in \texttt{SENT}$. Sea $\mathcal{M}_c = \langle \{1\}, \{1\}, \{\} \rangle$, vamos a probar $\mathcal{M}_c \not\models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \beta$.

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M}_c \not\models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \beta \\
\Leftarrow \text{(clausura)} \\
\mathcal{M}_c \not\models (\forall y)(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \beta) \\
\Leftarrow \text{(2.4.5, sustitución, y } \beta \in \texttt{SENT}) \\
\mathcal{M}_c \not\models \varphi_1[\bar{1}/y] \wedge \varphi_2[\bar{1}/y] \wedge \beta \\
\Leftarrow \text{(2.4.5)} \\
\mathcal{M}_c \not\models \varphi_1[\bar{1}/y] \\
\Leftarrow \text{(2.4.5 y sustitución)} \\
\mathcal{M}_c \not\models P(\bar{1}) \to Q(\bar{1},\bar{1}) \\
\Leftarrow \text{(2.4.5)} \\
\mathcal{M}_c \models P(\bar{1}) \text{ y } \mathcal{M}_c \not\models Q(\bar{1},\bar{1}) \\
\Leftarrow \text{(interpretación)} \\
1 \in \{1\} \text{ y } \langle 1,1 \rangle \notin \{\}\,,
\end{array}
$$

y esto es verdadero.

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguientes juicios. En ningún caso son válidas consideraciones semánticas:

a. $(\forall x)(P(x) \to Q(f(x))), (\forall x)(Q(x) \to P(f(x))) \vdash (\forall x)(f(x) =' x \to (P(x) \leftrightarrow Q(x)))$

b. $\vdash ((\exists x)P(f(x)) \to (\forall x)P(x)) \to (P(f(c_1)) \vee \neg P(f(c_2)))$

Bosquejo de solución

a.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[f(x)='x]_1 \qquad \dfrac{\dfrac{(\forall x)(Q(x) \to P(f(x)))}{Q(x) \to P(f(x))}\,E\forall^{*4} \qquad [Q(x)]_2}{P(f(x))}\,E\to}{P(x)}\,RI4^{*2} \qquad \dfrac{[f(x)='x]_1 \qquad \dfrac{\dfrac{(\forall x)(P(x) \to Q(f(x)))}{P(x) \to Q(f(x))}\,E\forall^{*5} \qquad [P(x)]_2}{Q(f(x))}\,E\to}{Q(x)}\,RI4^{*3}}{P(x) \leftrightarrow Q(x)}\,I\leftrightarrow_2}{f(x)='x \to (P(x) \leftrightarrow Q(x))}\,I\to_1}{(\forall x)(f(x)='x \to (P(x) \leftrightarrow Q(x)))}\,I\forall^{*1}$$

***1** x no aparece libre en $(\forall x)(Q(x) \to P(f(x))$ ni en $(\forall x)(P(x) \to Q(f(x))$.

***2** x libre para z en $P(z)$ y $f(x)$ libre para z en $P(z)$.

***3** x libre para z en $Q(z)$ y $f(x)$ libre para z en $Q(z)$.

***4** x está libre para x en $Q(x) \to P(f(x))$.

***5** x está libre para x en $P(x) \to Q(f(x))$.

b.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(P(f(c_1)) \vee \neg P(f(c_2)))]_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\exists x)P(f(x)) \to (\forall x)P(x)]_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(P(f(c_1)) \vee \neg P(f(c_2)))]_1 \qquad \dfrac{[\neg P(f(c_2))]_3}{P(f(c_1)) \vee \neg P(f(c_2))}\,I\vee}{\bot}\,E\neg}{P(f(c_2))}\,RAA_3}{(\exists x)P(f(x))}\,I\exists^{*2}}{(\forall x)P(x)}\,E\to}{P(f(c_1))}\,E\forall^{*1}}{P(f(c_1)) \vee \neg P(f(c_2))}\,I\vee}{\bot}\,E\neg}{P(f(c_1)) \vee \neg P(f(c_2))}\,RAA_1}{((\exists x)P(f(x)) \to (\forall x)P(x)) \to (P(f(c_1)) \vee \neg P(f(c_2)))}\,I\to_2$$

***1** $f(c_1)$ libre para x en $P(x)$

***2** c_2 libre para x en $P(f(x))$.

Ejercicio 4 (25 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 1; -; 1\rangle$, y las siguientes estructuras:

$$\mathcal{M}_0 := \langle \{0\}, \{0\}, 0\rangle$$
$$\mathcal{M}_1 := \langle \{2,3\}, \{2,3\}, 2\rangle$$

a. Indique si las siguientes frases son verdaderas. Justifique su respuesta:

I. $Th(\{\mathcal{M}_0\}) = Th(\{\mathcal{M}_1\})$

II. $Th(\{\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1\}) = Th(\{\mathcal{M}_1\})$

III. $Th(\{\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1\}) = Th(\{\mathcal{M}_0\})$

b. Sea $\mathcal{M}$ tal que $Th(\{\mathcal{M}_0\}) = Th(\{\mathcal{M}\})$. Indique si la siguiente frase es verdadera. Justifique su respuesta:

$$Th(\{\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1\}) = Th(\{\mathcal{M}, \mathcal{M}_1\})$$

Bosquejo de solución

a. **Falso** Considero $\alpha := (\exists x)\neg x{=}'c$. Probaremos que $\alpha \in Th(\{\mathcal{M}_1\})$ pero $\alpha \notin Th(\{\mathcal{M}_0\})$.

$\mathcal{M}_1 \models \alpha$	$\mathcal{M}_0 \not\models \alpha$
$\Leftarrow$ (2.4.5)	$\Leftarrow$ (2.4.5)
$\mathcal{M}_1 \models \neg\bar{3}{=}'c$	$\mathcal{M}_0 \not\models \neg\bar{0}{=}'c$
$\Leftarrow$ (2.4.5)	$\Leftarrow$ (2.4.5)
$\mathcal{M}_1 \not\models \bar{3}{=}'c$	$\mathcal{M}_0 \models \bar{0}{=}'c$
$\Leftarrow$ (Def.)	$\Leftarrow$ (Def.)
$v^{\mathcal{M}_1}(\bar{3}) \neq v^{\mathcal{M}_1}(c)$	$v^{\mathcal{M}_0}(\bar{0}) = v^{\mathcal{M}_0}(c)$
$\Leftarrow$ (Def.)	$\Leftarrow$ (Def.)
$3 \neq 2.$	$0 = 0.$

b. **Falso** Consideremos el α perteneciente a $Th(\{\mathcal{M}_1\})$ de la parte anterior. Como $\mathcal{M}_0 \not\models \alpha$ tenemos que $\alpha \notin Th(\{\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1\})$. Por lo tanto, α distingue entre los conjuntos $Th(\{\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1\})$ y $Th(\{\mathcal{M}_1\})$.

c. **Falso** Consideremos el α de la parte anterior. Como $\mathcal{M}_0 \not\models \alpha$ tenemos que $\mathcal{M}_0 \models \neg\alpha$. Como $\mathcal{M}_1 \models \alpha$ tenemos que $\mathcal{M}_1 \not\models \neg\alpha$. Por lo tanto, $\neg\alpha$ distingue entre los conjuntos $Th(\{\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1\})$ y $Th(\{\mathcal{M}_0\})$.

d. **Verdadero**

$$
\begin{aligned}
& Th(\{\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1\}) \\
= & \text{ (Prop. Th)} \\
& Th(\{\mathcal{M}_0\}) \cap Th(\{\mathcal{M}_1\}) \\
= & \text{ (Hipótesis de letra)} \\
& Th(\{\mathcal{M}\}) \cap Th(\{\mathcal{M}_1\}) \\
= & \text{ (Prop. Th)} \\
& Th(\{\mathcal{M}, \mathcal{M}_1\})
\end{aligned}
$$