Examen de Lógica

4 de diciembre de 2019

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

a. Defina el conjunto de las tiras de los naturales 0 y 1. A este conjunto le llamaremos VB (Vectores Binarios).

b. Defina por recursión primitiva la función $cant_1 : \text{VB} \to \mathbb{N}$ que calcula la cantidad de unos que aparecen en el vector.

c. Defina por recursión primitiva la función $not : \text{VB} \to \text{VB}$ tal que cambia ceros por unos y unos por ceros. Ej: $not(1101) = 0010$

d. Considere la función $largo$ con la semántica habitual: cuenta la cantidad de símbolos de la tira y definida como sigue:

$$\begin{array}{ll} largo :: \text{VB} \to \mathbb{N} & \\ largo(d) & = 1 \\ largo(dw) & = 1 + largo(w) \end{array}$$

Pruebe inductivamente que para cualquier $w \in \text{VB}$ se cumple que:

$$cant_1(w) = largo(w) - cant_1(not(w))$$

Bosquejo de solución

a. Sea $D = \{0, 1\}$

I Si $d \in D$ entonces $d \in \text{VB}$

II Si $d \in D$ y $w \in \text{VB}$ entonces $dw \in \text{VB}$

b.

$$\begin{array}{ll} cant_1 : \text{VB} \to \mathbb{N} & \\ cant_1(0) & = 0 \\ cant_1(1) & = 1 \\ cant_1(dw) & = d + cant_1(w) \end{array}$$

c.

$$\begin{array}{ll} not : \text{VB} \to \text{VB} & \\ not(d) & = 1 - d \\ not(dw) & = (1 - d)not(w) \end{array}$$

d.

$$(\bar{\forall} w \in \mathrm{VB}) cant_1(w) = largo(w) - cant_1(not(w))$$

Demostración usando el PIP para VB

$P(w) := cant_1(w) = largo(w) - cant_1(not(w))$

Paso Base

T) $P(d) = cant_1(d) = largo(d) - cant_1(not(d))$

Demo. Caso 1 : d = 0

$largo(0) - cant_1(not(0))$
$=$ (definición de largo)
$1 - cant_1(not(0))$
$=$ (definición de not)
$1 - cant_1(1)$
$=$ (definición de $cant_1$)
$1 - 1 =$ (aritmética)
0
$=$ (defnción $cant_1$)
$cant_1(0)$

Caso 2 : d = 1

$largo(1) - cant_1(not(1))$
$=$ (definición de largo)
$1 - cant_1(not(1))$
$=$ (definición de not)
$1 - cant_1(0)$
$=$ (definición de $cant_1$)
$1 - 0 =$ (aritmética)
$1 =$ (definición de $cant_1$)
$cant_1(1)$

Paso Inductivo

Hi) $cant_1(w) = largo(w) - cant_1(not(w))$

Ti $cant_1(dw) = largo(dw) - cant_1(not(dw))$

Demo.

Caso 1: d = 0

$$largo(0w) - cant_1(not(0w))$$
$$= \text{(definición de largo)}$$
$$1 + largo(w) - cant_1(not(0w))$$
$$= \text{(definición de not)}$$
$$1 + largo(w) - cant_1((1-0)not(w))$$
$$= \text{(definición de aritmética)}$$
$$1 + largo(w) - cant_1(1not(w))$$
$$= \text{(definición de } cant_1\text{)}$$
$$1 + largo(w) - (1 + cant_1(not(w)))$$
$$= \text{(definición de aritmética)}$$
$$largo(w) - cant_1(not(w))$$
$$= \text{(HI)}$$
$$cant_1(w)$$
$$= \text{(definición de } cant_1\text{)}$$
$$cant_1(0w)$$

Caso 1: d = 1

$$largo(1w) - cant_1(not(1w))$$
$$= \text{(definición de largo)}$$
$$1 + largo(w) - cant_1(not(1w))$$
$$= \text{(definición de not)}$$
$$1 + largo(w) - cant_1((1-1)not(w))$$
$$= \text{(definición de aritmética)}$$
$$1 + largo(w) - cant_1(0not(w))$$
$$= \text{(definición de } cant_1\text{)}$$
$$1 + largo(w) - (cant_1(not(w)))$$
$$= \text{(definición de aritmética)}$$
$$1 + (largo(w) - cant_1(not(w)))$$
$$= \text{(HI)}$$
$$1 + cant_1(w)$$
$$= \text{(definición de } cant_1\text{)}$$
$$cant_1(1w)$$

Por lo demostrado en el paso base, en el paso inductivo y por aplicación del PIP para VB queda demostrada la propiedad.

Ejercicio 2 (25 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 1, 2; -; 1 \rangle$, con símbolos de predicados P_1 y P_2 y símbolo de constante c_1.

Sean $\mathcal{M}_i = \langle \mathbb{N}, A_i, B_i, k_i \rangle$ con $i \in \{1, \ldots, 6\}$ estructuras de dicho tipo de similaridad.

a. Sea $\varphi = P_1(c_1) \wedge \neg(\forall x)P_1(x)$

  I. Determine si existe $\mathcal{M}_1$ tal que A_1 es infinito y $\mathcal{M}_1 \models \varphi$. En caso de no ser posible explique por qué.
  II. Determine si existe $\mathcal{M}_2$ tal que A_2 es infinito y $\mathcal{M}_2 \not\models \varphi$. En caso de no ser posible explique por qué.
  III. Determine si existe $\mathcal{M}_3$ tal que $A_3 = \emptyset$ y $\mathcal{M}_3 \models \varphi$. En caso de no ser posible explique por qué.

IV. Determine si existe $\mathcal{M}_4$ tal que A_4 es finito, no vacío y $\mathcal{M}_4 \not\models \varphi$. En caso de no ser posible explique por qué.

b. Sea $\psi = P_1(x) \wedge P_1(y) \leftrightarrow P_2(x, y)$.

I. Si $A_5 = \emptyset$, determine $B_5 \neq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y k_5 para que $\mathcal{M}_5 \models \psi$. Justifique.

II. Si A_6 es una relación cualquiera sobre $\mathbb{N}$, determine B_6 y k_6 para que $\mathcal{M}_6 \models \psi$. Justifique.

Bosquejo de solución

a. Sea $\varphi = P_1(c_1) \wedge \neg(\forall x)P_1(x)$

Sea $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, A, B, k \rangle$ del tipo de similaridad adecuado.

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} \models \varphi \\ \Leftrightarrow \text{ (2.4.5)} \\ \mathcal{M} \models P_1(c) \text{ y } \mathcal{M} \models \neg(\forall x)P_1(x) \\ \Leftrightarrow \text{ (2.4.5x2 y sust.)} \\ \mathcal{M} \models P_1(c) \text{ y } (\bar{\exists} a \in \mathbb{N})(\mathcal{M} \not\models P_1(\bar{a})) \\ \Leftrightarrow \text{ (interpretación de fórmulas atómicas y términos)} \\ k \in A \text{ y } (\bar{\exists} a \in \mathbb{N})(a \notin A) \end{array}$$

I. Determine si existe $\mathcal{M}_1$ tal que A_1 es infinito y $\mathcal{M}_1 \models \varphi$. En caso de no ser posible explique por qué.
Sea $\mathcal{M}_1 = \langle \mathbb{N}, Pares, \geq, 2 \rangle$
Observar que $A_1 = Pares$ es infinito y que se cumple lo siguiente:

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_1 \models \varphi \\ \Leftrightarrow \text{ (por parte a)} \\ 2 \in Pares \text{ y } (\bar{\exists} a \in \mathbb{N})(a \notin Pares) \\ \text{Lo cual se cumple trivialmente} \end{array}$$

II. Determine si existe $\mathcal{M}_2$ tal que A_2 es infinito y $\mathcal{M}_2 \not\models \varphi$. En caso de no ser posible explique por qué.
Sea $\mathcal{M}_2 = \langle \mathbb{N}, Pares, \geq, 1 \rangle$
Observar que $A_2 = Pares$ es infinito y que se cumple lo siguiente:

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_2 \not\models \varphi \\ \Leftrightarrow \text{ (por parte a)} \\ 1 \notin Pares \text{ o } \textbf{ NO } (\bar{\exists} a \in \mathbb{N})(a \notin Pares) \\ \text{Lo cual se cumple trivialmente porque } 1 \notin Pares. \end{array}$$

III. Determine si existe $\mathcal{M}_3$ tal que $A_3 = \emptyset$ y $\mathcal{M}_3 \models \varphi$. En caso de no ser posible explique por qué.
No es posible, si $A_3 = \emptyset$ entonces $k \notin A_3$ por lo que no se cumple $k \in A_3$ y $(\bar{\exists} a \in \mathbb{N})(a \notin A_3)$ por no cumplirse la primera parte del y.

IV. Determine si existe $\mathcal{M}_4$ tal que A_4 es finito, no vacío y $\mathcal{M}_4 \not\models \varphi$. En caso de no ser posible explique por qué.
Sea $\mathcal{M}_4 = \langle \mathbb{N}, \{2\}, \geq, 1\rangle$
Observar que $A_4 = \{2\}$ es finito y que se cumple lo siguiente:

$\mathcal{M}_4 \not\models \varphi$
$\Leftrightarrow$ (por parte a)
$1 \notin \{2\}$ o **NO** $(\bar{\exists} a \in \mathbb{N})(a \notin \{2\})$
Lo cual se cumple trivialmente porque $1 \notin \{2\}$.

b. Sea $\psi = P_1(x) \wedge P_1(y) \leftrightarrow P_2(x, y)$.

Sea $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, A, B, k\rangle$ del tipo de similaridad adecuado.

$\mathcal{M} \models \psi$
$\Leftrightarrow$ (def $\models$)
$\mathcal{M} \models (\forall x)(\forall y)(P_1(x) \wedge P_1(y) \leftrightarrow P_2(x, y))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 y sust. x2)
$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})((\bar{\forall} b \in \mathbb{N})(\mathcal{M} \models P_1(\bar{a}) \wedge P_1(\bar{b}) \leftrightarrow P_2(\bar{a}, \bar{b}))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 x2)
$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})((\bar{\forall} b \in \mathbb{N})((\mathcal{M} \models P_1(\bar{a})$ y $\mathcal{M} \models P_1(\bar{b})) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models P_2(\bar{a}, \bar{b}))$
$\Leftrightarrow$ (interpretación de fórmulas atómicas y términos)
$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})((\bar{\forall} b \in \mathbb{N})((a \in A$ y $b \in A) \Leftrightarrow (a, b) \in B)$

I. Si $A_5 = \emptyset$, determine $B_5 \neq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y k_5 para que $\mathcal{M}_5 \models \psi$. Justifique.
Por parte b, si $A_5 = \emptyset$ entonces la parte derecha del si y solo sí nunca se cumple. Por lo que se encontrar B_5 tal que no contenga ningún $a, b \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $B_5 = \emptyset$.
Por otro lado, el valor de k_5 no es relevante, así que se elige un natural cualquiera: $k_5 = 8$.

II. Si A_6 es una relación cualquiera sobre $\mathbb{N}$, determine B_6 y k_6 para que $\mathcal{M}_6 \models \psi$. Justifique.
Para que $\mathcal{M}_6 \models \psi$, se tiene que cumplir por parte b que:
$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})((\bar{\forall} b \in \mathbb{N})((a \in R$ y $b \in R) \Leftrightarrow (a, b) \in B_6)$ o lo que es lo mismo por teoría de conjuntos $R \times R \subseteq B_6$ y $B_6 \subseteq R \times R$. Por lo tanto $B_6 = R \times R$.
Igual que en la parte anterior, el valor de k_6 no es relevante, por lo que se elige un natural cualquiera: $k_6 = 25$.

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguientes juicios. En ningún caso son válidas consideraciones semánticas:

a. $\neg(\alpha \to \neg\beta) \to (\alpha \wedge \neg\beta) \vdash \neg\neg\alpha \to \neg\beta$
b. $(\forall x)(\exists y)(\forall z) f(x, y) =' g(z), \neg g(c_0) =' g(c_1) \vdash \bot$

Bosquejo de solución

a. $\neg(\alpha \to \neg\beta) \to (\alpha \wedge \neg\beta) \vdash \neg\neg\alpha \to \neg\beta$

$$
\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\alpha]^4 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\alpha \to \neg\beta) \to (\alpha \wedge \neg\beta) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha \to \neg\beta]^1 \quad [\alpha]^2}{\neg\beta}\,E\to \qquad [\beta]^3}{\bot}\,E\neg}{\neg(\alpha \to \neg\beta)}\,I\neg(1)}{\alpha \wedge \neg\beta}\,E\to}{\neg\beta}\,E\wedge \qquad [\beta]^3}{\bot}\,E\neg}{\neg\alpha}\,I\neg(2)}{\dfrac{\bot}{\neg\beta}\,I\neg(3)}\,E\neg}{\neg\neg\alpha \to \neg\beta}\,I\to(4)
$$

b. $(\forall x)(\exists y)(\forall z)f(x,y) =' g(z), \neg g(c_0) =' g(c_1) \vdash \bot$

$$
\dfrac{\neg g(c_0) =' g(c_1) \qquad \dfrac{\dfrac{(\forall x)(\exists y)(\forall z)f(x,y) =' g(z)}{(\exists y)(\forall z)f(x,y) =' g(z)}\,E\forall(*3) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall z)f(x,y) =' g(z)]^1}{f(x,y) =' g(c_0)}\,E\forall(*1)}{g(c_0) =' f(x,y)}\,RI2 \qquad \dfrac{[(\forall z)f(x,y) =' g(z)]^1}{f(x,y) =' g(c_1)}\,E\forall(*2)}{g(c_0) =' g(c_1)}\,RI3}{g(c_0) =' g(c_1)}\,E\exists(*4)(1)}{\bot}\,E\neg
$$

(*1) c_0 está libre para z en $f(x,y) =' g(z)$

(*2) c_1 está libre para z en $f(x,y) =' g(z)$

(*3) x está libre para x en cualquier fórmula en particular para $(\exists y)(\forall z)f(x,y) =' g(z)$

(*4) $y \notin FV\{g(c_0) =' g(c_1)\}$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Sean:

- $\Gamma = \{\varphi \in \texttt{PROP} \mid\, \models \varphi\}$
- $\Delta = \{\varphi \in \texttt{PROP} \mid\, \models \neg\varphi\}$
- $X = \{p_i \in P \mid i \leq 80\}$

a. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

I. $(\bar{\exists} T\ teoria)(T \cap \Gamma = \emptyset)$
II. $(\bar{\exists} T\ teoria)(T \cap \Delta = \emptyset)$
III. $(\bar{\exists} T\ teoria)(T \cap \Delta = \Delta)$
IV. $(\bar{\exists} T\ teoria)(T \subseteq X)$

b. Dé Ω consistente maximal que cumpla $X \not\subseteq \Omega$. Justifique

Bosquejo de solución

a. I. $(\bar{\exists} T\ teoria)(T \cap \Gamma = \emptyset)$
FALSO
Vamos a probar $(\bar{\forall} T\ teoria)(T \cap \Gamma = \Gamma)$ y por lo tanto $(\bar{\forall} T\ teoria)(T \cap \Gamma \neq \emptyset)$

Sea T_1 una teoría cualquiera y $\varphi \in \Gamma$.

$$\begin{array}{l} \varphi \in \Gamma \\ \Leftrightarrow \text{(definición de } \Gamma) \\ \models \varphi \\ \Leftrightarrow \text{(corrección y completitud)} \\ \vdash \varphi \\ \Rightarrow \text{(def de DER)} \\ T_1 \vdash \varphi \\ \Rightarrow (T_1 \text{ es teoría}) \\ \varphi \in T_1 \end{array}$$

Entonces $(\bar{\forall} \varphi \in \Gamma)(\varphi \in T_1)$, por lo que $T_1 \cap \Gamma = \Gamma$.

II. $(\bar{\exists} T\ teoria))(T \cap \Delta = \emptyset)$
VERDADERO
Sea $T_2 = \textsc{Cons}(\{p_1\})$.
T_2 es teoría porque es un $\textsc{Cons}$.
Vamos a probar $(\bar{\forall} \varphi \in T_2)(\varphi \notin \Delta)$.
Sea $\varphi \in T_2$ cualquiera.

$$\begin{array}{l} \varphi \in T_2 \\ \Leftrightarrow \text{(definición de } T_2) \\ p_1 \vdash \varphi \\ \Leftrightarrow \text{(corrección y completitud)} \\ p_1 \models \varphi \\ \Leftrightarrow \text{(definición de } \models) \\ (\bar{\forall} v : Val)(v(p_1) = 1 \Rightarrow v(\varphi) = 1) \\ \Rightarrow (v_1(p_i) = 1\ ) \\ v_1(\varphi) = 1 \\ \Rightarrow \\ (\bar{\exists} v : Val)(v(\varphi) = 1) \\ \Rightarrow \text{(definición de valuación)} \\ (\bar{\exists} v : Val)(v(\neg\varphi) = 0) \\ \Rightarrow \text{(definición de } \Delta) \\ \varphi \notin \Delta \end{array}$$

III. $(\bar{\exists} T\ teoria)(T \cap \Delta = \Delta)$ **VERDADERO**
Sea $T_3 = \texttt{PROP}$
T_3 es teoría porque es cerrado bajo derivación.
$\Delta \subseteq \texttt{PROP}$ por definición de Δ, por lo que $T_3 \cap \Delta = \Delta$.

IV. $(\bar{\exists} T\ teoria)(T \subseteq X)$ **FALSO**
Sea T_4 una teoría cualquiera.
Por parte aI, $(\bar{\forall} \varphi \in \Gamma)(\varphi \in T_4)$.

Por definición de Γ, $\neg\bot \in \Gamma$ por lo que $\neg\bot \in T_4$ $(*_1)$.
Por definición de X, $\neg\bot \notin X$ $(*_2)$.

Por $(*_1)$ y $(*_2)$ $\neg\bot \in T_4$ pero $\neg\bot \notin X$ por lo que $T_4 \not\subseteq X$.

b. Dé Ω consistente maximal que cumpla $X \not\subseteq \Omega$. Justifique

Sea $\Omega = \textsc{Cons}(\{\neg p_0, \ldots, \neg p_i, \ldots\})$

Ω es teoría por ser un $\textsc{Cons}$.
Hay una única valución v que cumple $v(\Omega) = 1$ porque contiene la negación de todas las letras proposicionales.

Como Ω es una teoría y hay una única valuación v que la satisface, por ejercicio del práctico 5, Ω es consistente maximal.