Examen de Lógica y Lógica modalidad al Revés

6 de febrero de 2018

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Considere el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$ y el lenguaje Σ^* definido sobre él.

a. Defina recursivamente la función $f : \mathcal{N} \to 2^{\Sigma^*}$ tal que cumple que:

$$f(k) = \{\omega / \omega \in \Sigma^* \text{ y } Largo(\omega) = k\}$$

NOTA: No puede usar la función largo en la definición.

b. Pruebe por inducción que dada cualquier tira $\alpha \in \Sigma^*$, hay un n tal que $\alpha \in f(n)$.

c. Pruebe por inducción que dada cualquier tira $\alpha \in \Sigma^*$, si $\alpha \in f(n)$ y $\alpha \in f(m)$ entonces $m = n$.

Bosquejo de solución

a. La función tiene como dominio a los naturales y como rango a los conjuntos de tiras de Σ Hay que tener en cuenta que $Largo(\varepsilon) = 0$ entonces $\varepsilon \in f(0)$.

$$\begin{array}{lcl} f(0) & = & \{\varepsilon\} \\ f(n+1) & = & \{x\omega / x \in \Sigma \text{ y } \omega \in f(n)\} \end{array}$$

b. Hay que demostrar el siguiente teorema:

T) $(\bar{\forall}\omega \in \Sigma^*)(\bar{\exists} n \in \mathcal{N})(\omega \in f(n))$

Dem.

Por inducción en Σ^*

PASO BASE

T) $(\bar{\exists} n \in \mathcal{N})\varepsilon \in f(n)$

Dem.

Por definición de f se cumple que $\varepsilon \in f(0)$, por lo que queda probada la tesis considerando $n = 0$ como testigo.

$\square$

PASO INDUCTIVO

H) $(\bar{\exists} n \in \mathcal{N})\omega \in f(n)$

T) $(\bar{\exists} k \in \mathcal{N})x\omega \in f(k)$

Dem.

Sea n el testigo mencionado en la hipótesis, tal que cumple que $\omega \in f(n)$.
Por definición de f, el conjunto $f(n+1)$ es el conjunto que contiene a todos los elementos tales que son de la forma $z\omega'$ tales que $z \in \Sigma^*$ y $\omega' \in f(n)$.
Dado que $\omega \in f(n)$, entonces $x\omega \in f(n+1)$ por la afirmación anterior. Tomando $k = n+1$ queda demostrada la tesis.

$\square$

Por las dos demostraciones anteriores, y aplicando el principo de inducción primitiva para Σ^*, se cumple que $(\bar{\forall}\omega \in \Sigma^*)(\bar{\exists} n \in \mathcal{N})(\omega \in f(n))$.

$\square$

c. Hay que demostrar el siguiente teorema:

T) $(\bar{\forall}\omega \in \Sigma^*)(\omega \in f(n)$ y $\omega \in f(m) \Rightarrow n = m)$

Dem.

Por inducción en Σ^*

PASO BASE

T) $(\varepsilon \in f(n)$ y $\varepsilon \in f(m) \Rightarrow n = m)$

Dem.

Por definición de f se cumple que $\varepsilon \in f(0)$. Además, también por la definición de f, $f(n+1)$ sólo contiene tiras que son de la forma $x\omega$ con $x \in \Sigma$ por lo que son distintas de ε. Por este motivo, $n = 0$ y $m = 0$ es el único caso posible.

$\square$

PASO INDUCTIVO

H) $\omega \in f(n')$ y $\omega \in f(m')$ entonces $n' = m'$

T) $x\omega \in f(n+1)$ y $x\omega \in f(m+1)$ entonces $n+1 = m+1$

Dem.

Por definición de f, se cumple que $x\omega \in f(n+1)$ sii $x \in \Sigma$ y $\omega \in f(n)$.
Análogamente, por definición de f se cumple que $x\omega \in f(m+1)$ sii $x \in \Sigma$ y $\omega \in f(m)$.
Por lo tanto se cumple que $\omega \in f(n)$ y $\omega \in f(m)$ por lo que, aplicando la hipótesis de inducción, tiene que ser iguales a n' y m' y por lo tanto, iguales entre sí. Por este motivo, se cumple que $n+1 = m+1$.

$\square$

Por las dos demostraciones anteriores, y aplicando el principo de inducción primitiva para Σ^*, se cumple que $(\bar{\forall}\omega \in \Sigma^*)(\omega \in f(n) land \omega \in f(m) \Rightarrow n = m)$.

$\square$

Ejercicio 2 (30 puntos)

Se considera $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ con un tipo de similaridad τ.
Probar las siguientes propiedades:

a. Para toda estructura $\mathcal{M}$ del tipo se similaridad apropiado y para toda fórmula $\varphi \in \texttt{FORM}_{\mathcal{L}}$ se cumple: $\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \forall x_i \varphi$

b. Se considera una estructura $\mathcal{M}$ del tipo se similaridad apropiado y fórmulas $\varphi, \psi \in \texttt{FORM}_{\mathcal{L}}$.

   I. Probar que cuando $x_i \notin \mathrm{FV}(\varphi) \cup \mathrm{FV}(\psi)$ se cumple:

$$\mathcal{M} \models \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \forall x_i \varphi \leftrightarrow \forall x_i \psi$$

   II. Probar que cuando $\mathrm{FV}(\varphi) \cup \mathrm{FV}(\psi) = \{x_i\}$, se cumple:

$$\mathcal{M} \models \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \mathcal{M} \models \forall x_i \varphi \leftrightarrow \forall x_i \psi$$

   III. Probar para φ, ψ y x_i cualesquiera : $\mathcal{M} \models \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \mathcal{M} \models \forall x_i \varphi \leftrightarrow \forall x_i \psi$

   IV. Probar que el recíproco: $\mathcal{M} \models \forall x_i \varphi \leftrightarrow \forall x_i \psi \Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi \leftrightarrow \psi$ no se cumple.

Bosquejo de solución

a. Supongamos que $\mathrm{FV}(\varphi) = \{z_1, \ldots, z_k\}$.

En el caso que $x_i \notin \mathrm{FV}(\varphi)$ tenemos que:

$\mathcal{M} \models \forall x_i \varphi$
$\Leftrightarrow$ (definición de $\models$)
$\mathcal{M} \models \forall z_1 \ldots \forall z_k \forall x_i \varphi$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a_1, \ldots, a_k, b \in |\mathcal{M}|) : \mathcal{M} \models \varphi[\overline{a_1}/z_1] \ldots [\overline{a_k}/z_k][\bar{b}/x_i]$
$\Leftrightarrow$ (def. sutitucion, $x_i \notin \mathrm{FV}(\varphi)$ - Como x_i no está en φ, la sustitución devuelve φ)
$(\bar{\forall} a_1, \ldots, a_k \in |\mathcal{M}|) : \mathcal{M} \models \varphi[\overline{a_1}/z_1] \ldots [\overline{a_k}/z_k]$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$\mathcal{M} \models \forall z_1 \ldots \forall z_k \varphi$
$\Leftrightarrow$ (def. de $\models$)
$\mathcal{M} \models \varphi$
$\square$

Para el caso en que $x_i \in \mathrm{FV}(\varphi)$ las clausuras de φ y $\forall x_i \varphi$ son equivalentes ya que tenemos los mismos cuantificadores pero (posiblemente) en distinto orden. Aplicamos propiedad el teorema 2.5.2 (orden de los cuantificadores) concluimos que ambas sentencias son equivalentes y por lo tanto tienen los mismos modelos.

b. I. Dado que $x_i \notin \mathrm{FV}(\varphi) \cup \mathrm{FV}(\psi)$, se pueden separar dos casos: si las fórmulas no tienen variables libres o si tienen alguna.

Consideramos el caso en que $\mathrm{FV}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \emptyset$

Se supone que $\mathcal{M} \models \varphi \leftrightarrow \psi$. Dado que no hay variables libres, se puede aplicar 2.4.5 concluyendo que:

$$(1) \mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi$$

.

Dado que las dos fórmulas son sentencias, se puede aplicar 2.4.5 y la parte a) estableciendo las siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned}&\mathcal{M} \models \forall x_i \varphi\\ &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi (\text{ parte a) de este ejercicio. })\\ &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi (\text{ por (1) })\\ &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \forall x_i \psi\end{aligned}$$

A partir de estas equivalencias se puede probar que

$$\mathcal{M} \models \forall x_i \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \forall x_i \psi$$

que por 2.4.5 (dado que no hay variables libres) se transforma en

$$\mathcal{M} \models \forall x_i \varphi \leftrightarrow \forall x_i \psi$$

.

Con este razonamiento, se probó que $\mathcal{M} \models \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \mathcal{M} \models \forall x_i \varphi \leftrightarrow \forall x_i \psi$. Aplicando un razonamiento similar se puede demostrar el recíproco.
Sea ahora el caso en donde $FV(\psi) \cup FV(\psi) = \{z_1, \ldots, z_k\}$ y $x_i \notin \{z_1, \ldots, z_k\}$

$$\begin{aligned}&\mathcal{M} \models \varphi \leftrightarrow \psi\\ &\Leftrightarrow \text{(definición } \models)\\ &\mathcal{M} \models \forall z_1 \ldots \forall z_k (\varphi \leftrightarrow \psi)\\ &\Leftrightarrow \text{(2.4.5)}\\ &(\bar{\forall} a_1 \ldots a_k \in |\mathcal{M}|) : \mathcal{M} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[\overline{a_1}/z_1] \ldots [\overline{a_k}/z_k]\\ &\Leftrightarrow \text{(definición de sustitución)}\\ &(\bar{\forall} a_1 \ldots a_k \in |\mathcal{M}|) : \mathcal{M} \models \varphi[\overline{a_1}/z_1] \ldots [\overline{a_k}/z_k] \leftrightarrow \psi[\overline{a_1}/z_1] \ldots [\overline{a_k}/z_k]\\ &\Leftrightarrow \text{(caso anterior, dado que no hay variables libres)}\\ &(\bar{\forall} a_1 \ldots a_k \in |\mathcal{M}|) : \mathcal{M} \models \forall x_i \varphi[\overline{a_1}/z_1] \ldots [\overline{a_k}/z_k] \leftrightarrow \forall x_i \psi[\overline{a_1}/z_1] \ldots [\overline{a_k}/z_k]\\ &\Leftrightarrow \text{(definición de sustitución, dado que } x_i \neq z_j \text{ con j cualquiera.)}\\ &(\bar{\forall} a_1 \ldots a_k \in |\mathcal{M}|) : \mathcal{M} \models (\forall x_i \varphi \leftrightarrow \forall x_i \psi)[\overline{a_1}/z_1] \ldots [\overline{a_k}/z_k]\\ &\Leftrightarrow \text{(2.4.5)}\\ &\mathcal{M} \models \forall z_1 \ldots \forall z_k (\forall x_i \varphi \leftrightarrow \forall x_i \psi)\\ &\Leftrightarrow \text{(definición de } \models)\\ &\mathcal{M} \models \forall x_i \varphi \leftrightarrow \forall x_i \psi\\ &\square\end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned}&\mathcal{M} \models \varphi \leftrightarrow \psi\\ &\Leftrightarrow \text{(definición de } \models)\\ &\mathcal{M} \models \forall x_i (\varphi \leftrightarrow \psi)\\ &\Leftrightarrow \text{(2.4.5, sustitución)}\\ &(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) : \mathcal{M} \models \varphi[\overline{a}/x_i] \leftrightarrow \psi[\overline{a}/x_i]\\ &\Leftrightarrow \text{(definición de } \models)\\ &(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|) : v^{\mathcal{M}}(\varphi[\overline{a}/x_i]) = v^{\mathcal{M}}(\psi[\overline{a}/x_i])\\ &\Rightarrow \text{(Dado que los valores son iguales en cada elemento del dominio, el mínimo de esos valores tiene que ser el mismo)}\\ &\text{mín}\{v^{\mathcal{M}}(\varphi[\overline{a}/x_i]) \mid a \in |\mathcal{M}|\} = \text{mín}\{v^{\mathcal{M}}(\psi[\overline{a}/x_i]) \mid a \in |\mathcal{M}|\}\\ &\Leftrightarrow \text{(definición de } v^{\mathcal{M}})\\ &v^{\mathcal{M}}(\forall x_i \varphi) = v^{\mathcal{M}}(\forall x_i \psi)\\ &\Leftrightarrow \text{(definición de } v^{\mathcal{M}})\\ &v^{\mathcal{M}}(\forall x_i \varphi \leftrightarrow \forall x_i \psi) = 1\\ &\Leftrightarrow \text{(definición de } \models)\\ &\mathcal{M} \models \forall x_i \varphi \leftrightarrow \forall x_i \psi\\ &\square\end{aligned}$$

III. Solo resta el caso en que $\mathrm{FV}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \{z_1, ..., z_k, x_i\}$

$\mathcal{M} \models \varphi \leftrightarrow \psi$
$\Leftrightarrow$ (definición de $\models$)
$\mathcal{M} \models \forall z_1 \ldots \forall z_k \forall x_i(\varphi \leftrightarrow \psi)$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a_i \ldots a_k \in |\mathcal{M}|) : \mathcal{M} \models \forall x_i(\varphi \leftrightarrow \psi)[\overline{a_1}/z_1] \ldots [\overline{a_k}/z_k]$
$\Leftrightarrow$ (sustitución)
$(\bar{\forall} a_i \ldots a_k \in |\mathcal{M}|) : \mathcal{M} \models \forall x_i(\varphi[\overline{a_1}/z_1] \ldots [\overline{a_k}/z_k] \leftrightarrow \psi[\overline{a_1}/z_1] \ldots [\overline{a_k}/z_k])$
$\Leftrightarrow$ (parte a))
$(\bar{\forall} a_i \ldots a_k \in |\mathcal{M}|) : \mathcal{M} \models \varphi[\overline{a_1}/z_1] \ldots [\overline{a_k}/z_k] \leftrightarrow \psi[\overline{a_1}/z_1] \ldots [\overline{a_k}/z_k]$
$\Rightarrow$ (parte bII))
$(\bar{\forall} a_i \ldots a_k \in |\mathcal{M}|) : \mathcal{M} \models \forall x_i \varphi[\overline{a_1}/z_1] \ldots [\overline{a_k}/z_k] \leftrightarrow \forall x_i \psi[\overline{a_1}/z_1] \ldots [\overline{a_k}/z_k]$
$\Leftrightarrow$ (sustitución)
$(\bar{\forall} a_i \ldots a_k \in |\mathcal{M}|) : \mathcal{M} \models (\forall x_i \varphi \leftrightarrow \forall x_i \psi)[\overline{a_1}/z_1] \ldots [\overline{a_k}/z_k]$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$\mathcal{M} \models \forall z_1 \ldots \forall z_k(\forall x_i \varphi \leftrightarrow \forall x_i \psi)$
$\Leftrightarrow$ (clausura)
$\mathcal{M} \models \forall x_i \varphi \leftrightarrow \forall x_i \psi$
$\square$

Ejercicio 3 (25 puntos)

Considere las siguientes fórmulas de un lenguaje de primer orden de tipo $\langle 2; 1; 1 \rangle$:

$$\begin{array}{lcl} \alpha & \equiv & (\forall y)(\neg \exists x P(x, y) \leftrightarrow y{=}'c) \\ \beta & \equiv & (\forall x)(\forall w)(P(w, x) \leftrightarrow \neg P(w, f(x))) \end{array}$$

a. Construya una derivación que pruebe que:

$$\alpha \vdash \neg(\exists y)(\neg(\exists x)(P(x, y)) \wedge \neg(y{=}'c))$$

b. Construya una derivación que pruebe que:

$$\alpha, \beta \vdash (\forall x)(P(x, f(c)))$$

En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas.

Bosquejo de solución

a. $\alpha \vdash \neg(\exists y)(\neg(\exists x)(P(x, y)) \wedge \neg(y{=}'c))$

$$\dfrac{\dfrac{[(\exists y)(\neg(\exists x)(P(x,y)) \wedge \neg(y{=}'c)]_1 \quad \dfrac{\dfrac{[\neg(\exists x)(P(x,y)) \wedge \neg(y{=}'c)]_2}{\neg(y{=}'c)}\,E\wedge \quad \dfrac{\dfrac{(\forall y)(\neg\exists x P(x,y) \leftrightarrow y{=}'c)}{\neg\exists x P(x,y) \leftrightarrow y{=}'c}\,E\forall^{(*2)} \quad \dfrac{[\neg(\exists x)(P(x,y)) \wedge \neg(y{=}'c)]_2}{\neg(\exists x)(P(x,y))}\,E_\wedge}{(y{=}'c)}\,E\leftrightarrow}{\bot}\,E\neg}{\bot}\,E\exists_2^{(*1)}}{\neg(\exists y)(\neg(\exists x)(P(x,y)) \wedge \neg(y{=}'c))}\,I\neg_1$$

($*_1$) $y \notin FV((\forall y)(\neg\exists x P(x,y) \leftrightarrow y{=}'c))$.

($*_2$) y libre para y en $(\neg\exists x P(x,y) \leftrightarrow y{=}'c))$.

b. $\alpha, \beta \vdash (\forall x)(P(x, f(c)))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall w)(P(w,x) \leftrightarrow \neg P(w,f(x)))}{(\forall w)(P(w,c) \leftrightarrow \neg P(w,f(c)))}\,E\forall^{(*4)}}{P(x,c) \leftrightarrow \neg P(x,f(c))}\,E\forall^{(*3)} \qquad [\neg P(x,f(c))]_1}{P(x,c)}\,E\leftrightarrow}{(\exists x)P(x,c)}\,I\exists^{(*2)} \qquad \dfrac{\dfrac{(\forall y)(\neg(\exists x)P(x,y) \leftrightarrow y{=}'c)}{\neg(\exists x)P(x,c) \leftrightarrow c{=}'c}\,E\forall^{(*5)} \qquad \dfrac{\;}{c{=}'c}\,RI1}{\neg(\exists x)P(x,c)}\,E\leftrightarrow}{\dfrac{\bot}{P(x,f(c))}\,RAA_1}\,E\neg$$

$$\dfrac{P(x,f(c))}{(\forall x)P(x,f(c))}\,I\forall^{(*1)}$$

($*_1$) $y \notin FV(\{(\forall y)(\neg\exists x P(x,y) \leftrightarrow y{=}'c), (\forall x)(\forall w)(P(w,x) \leftrightarrow \neg P(w,f(x)))\})$.

($*_2$) x libre para x en $P(x,c)$.

($*_3$) x libre para w en $P(w,c) \leftrightarrow \neg P(w,f(c))$.

($*_4$) c libre para x en $(\forall z)((\forall w)(P(w,x) \leftrightarrow \neg P(w,f(x)))$.

($*_5$) c libre para y en $\neg(\exists x)P(x,y) \leftrightarrow y{=}'c$.

c. Otra posible es probar que $(\forall x)x{=}'f(f(x))$

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere el siguiente lenguaje proposicional $\mathcal{L}_1$:

1. $p_0 \in \mathcal{L}_1$
2. $\bot \in \mathcal{L}_1$
3. $(\alpha \to \beta) \in \mathcal{L}_1$ si $\alpha \in \mathcal{L}_1$ y $\beta \in \mathcal{L}_1$

Considere tanto la semántica como las reglas de inferencia habituales para la lógica proposicional.

a. Defina un conjunto consistente maximal A en $\mathcal{L}_1$. Justifique su respuesta.

b. Defina otro conjunto consistente maximal B diferente de A. Justifique su respuesta.

c. Indique cuántos conjuntos consistentes maximales tiene $\mathcal{L}_1$. Justifique su respuesta.

d. Considere el conjunto $C = \mathcal{L}_1 - (A \cup B)$. Pruebe que si $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_1$ es tal que $CONS(\Gamma) \cap C \neq \emptyset$ entonces $CONS(\Gamma) = \mathcal{L}_1$

Bosquejo de solución

a. Sea $A \equiv \{\varphi / v(\varphi) = 1 \text{ y } v(P) = 1\}$.
Este conjunto es Consistente Maximal, dado que contiene (por definición) a todas las fórmulas de $\mathcal{L}_1$ que son verdaderas cuando P es verdadera. Cualquier fórmula ψ que no esté en el conjunto, tiene que ser falsa en esa valuación por lo que el conjunto $A \cup \psi$, no habrá ninguna valuación que pueda hacer verdaderas a todas las fórmulas del conjunto y por lo tanto, el conjunto será inconsistente.

b. Sea $B \equiv \{\varphi / v(\varphi) = 1 \text{ y } v(P) = 0\}$.
Este conjunto es Consistente Maximal, dado que contiene (por definición) a todas las fórmulas de $\mathcal{L}$ que son verdaderas cuando P es falsa. Cualquier fórmula ψ que no esté en el conjunto, tiene que ser falsa en esa valuación por lo que el conjunto $B \cup \psi$, no habrá ninguna valuación que pueda hacer verdaderas a todas las fórmulas del conjunto y por lo tanto, el conjunto será inconsistente.

c. Dado que el lenguaje sólo posee una letra proposicional, sólo pueden existir dos valuaciones a considerar. Dado que para cada valuación existe un único conjunto consistente maximal, sólo pueden existir dos conjuntos consistentes maximales.

d. El conjunto $C = \mathcal{L}_1 - (A \cup B)$ contiene a todas las fórmulas del lenguaje que no están ni en A ni en B. Esto quiere decir que las fórmulas de C son falsas en las valuaciones en que P es verdadero y también en las valuaciones en que P es falsa. Esto hace que esas fórmulas sean falsas en todas la valuaciones, por lo que son las contradicciones.
Un conjunto Γ tal que $CONS(\Gamma) \cap C \neq \emptyset$, cumple que $CONS(\Gamma) \vdash \perp$ dado que C contiene a todas las contradicciones que son todas equivalente entre sí. Por lo tanto, $CONS(\Gamma)$ es inconsistente y tiene que incluir a todo el lenguaje.