Examen de Lógica

4 de diciembre de 2018

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Sea $\Sigma = \{a, b, c, (,), \#\}$ y $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ el lenguaje definido inductivamente por las siguientes reglas:

I $bb \in \mathcal{L}$

II Si $\alpha \in \mathcal{L}$ y $\beta \in \mathcal{L}$ entonces $(\alpha\#\beta) \in \mathcal{L}$

III Si $\alpha \in \mathcal{L}$ y $\beta \in \mathcal{L}$ entonces $(\alpha aa\beta) \in \mathcal{L}$

a. Defina una función *reemp* que dado un elemento de $\mathcal{L}$ sustituye las ocurrencias dobles del simbolo a por el símbolo $\#$.

   Ejemplos : $reemp(bb) = bb$, $reemp((bb\#bb)) = (bb\#bb)$, $reemp((bb\#(bbaabb))) = (bb\#(bb\#bb))$

b. Demuestre inductivamente que el recorrido de la función *reemp* definida en la parte **a** está incluído en $\mathcal{L}$. O sea que: $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(reemp(w) \in \mathcal{L})$

c. Dada la función $largo : \mathcal{L} \to \mathbb{N}$ que dada una tira w de $\mathcal{L}$ devuelve la cantidad de símbolos de w y cuya definición es:

$$\begin{aligned} largo(bb) &= 2 \\ largo((\alpha\#\beta)) &= largo(\alpha) + largo(\beta) + 3 \\ largo((\alpha aa\beta)) &= largo(\alpha) + largo(\beta) + 4 \end{aligned}$$

   Demostrar inductivamente que se cumple la siguiente propiedad:

$$(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(largo(reemp(w)) \leq largo(w))$$

d. Sea un lenguaje de primer orden de tipo de similaridad $\langle 1, 2; 1; 1\rangle$ con símbolos de predicados, de función y constante: P_1 P_2 f_1 c respectivamente.

   Defina $R1$,$R2$,F y e para que la estructura $\mathcal{M} = \langle \mathcal{L}, R1, R2, F, e\rangle$ de tipo $\langle 1, 2; 1; 1\rangle$ cumpla las siguientes condiciones. Justifique su respuesta.

   - $F \neq identidad$
   - $\mathcal{M} \models (\forall x)P_1(x)$
   - $\mathcal{M} \models (\forall x)P_2(f_1(x), x)$
   - $\mathcal{M} \models (\exists x)(\exists y)\neg P_2(x, y)$

   SUGERENCIA: Usar las funciones y propiedades definidas y/o probadas en las partes anteriores.

Bosquejo de solución

a.

$$
\begin{aligned}
reemp(bb) &= bb \\
reemp((\alpha\#\beta)) &= (reemp(\alpha)\#reemp(\beta)) \\
reemp((\alpha aa\beta)) &= (reemp(\alpha)\#reemp(\beta))
\end{aligned}
$$

b. $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(reemp(w) \in \mathcal{L})$

Demostración usando el PIP para $\mathcal{L}$

$P(w) := reemp(w) \in \mathcal{L}$

Paso Base

T) $P(bb) = reemp(bb) \in \mathcal{L}$

Demo.

$reemp(bb)$
$=$ (definición de $reemp$)
bb
$\in$ (regla i definición de $\mathcal{L}$)
$\mathcal{L}$

Paso Inductivo 1

Hi) $P(\alpha) = reemp(\alpha) \in \mathcal{L}$
$P(\beta) = reemp(\beta) \in \mathcal{L}$

Ti) $P((\alpha\#\beta)) = reemp((\alpha\#\beta)) \in \mathcal{L}$

Demo.

$reemp((\alpha\#\beta))$
$=$ (definición de $reemp$)
$(reemp(\alpha)\#reemp(\beta))$
$\in$ (por Hi) $reemp(\alpha), reemp(\beta) \in \mathcal{L}$ + regla ii definición de $\mathcal{L}$)
$\mathcal{L}$

Paso Inductivo 2

Hi) $P(\alpha) = reemp(\alpha) \in \mathcal{L}$
$P(\beta) = reemp(\beta) \in \mathcal{L}$

Ti) $P((\alpha aa\beta)) = reemp((\alpha aa\beta)) \in \mathcal{L}$

Demo.

$reemp((\alpha aa\beta))$
$=$ (definición de $reemp$)
$(reemp(\alpha)\#reemp(\beta))$
$\in$ (por Hi) $reemp(\alpha), reemp(\beta) \in \mathcal{L}$ + regla ii definición de $\mathcal{L}$)
$\mathcal{L}$

c. $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(largo(reemp(w)) \leq largo(w))$

Demostración usando el PIP para $\mathcal{L}$

$P(w) := largo(reemp(w)) \leq largo(w)$

Paso Base

T) $P(bb) = largo(reemp(bb)) \leq largo(bb)$

Demo.

$$
\begin{aligned}
& largo(reemp(bb)) \\
& = \text{(definición de } reemp\text{)} \\
& largo(bb)
\end{aligned}
$$

Paso Inductivo 1

Hi) $P(\alpha) = largo(reemp(\alpha)) \leq largo(\alpha)$
$P(\beta) = largo(reemp(\beta)) \leq largo(\beta)$

Ti) $P((\alpha\#\beta)) = largo(reemp((\alpha\#\beta))) \leq largo((\alpha\#\beta))$

Demo.

$$
\begin{aligned}
& largo(reemp((\alpha\#\beta))) \\
& = \text{(definición de } reemp\text{)} \\
& largo((reemp(\alpha)\#reemp(\beta))) \\
& = \text{(definición de } largo\text{)} \\
& largo(reemp(\alpha)) + largo(reemp(\beta)) + 3 \\
& \leq \text{(Hi))} \\
& largo(\alpha) + largo(\beta) + 3 \\
& = \text{(definición de } largo\text{)} \\
& largo((\alpha\#\beta))
\end{aligned}
$$

Paso Inductivo 2

Hi) $P(\alpha) = largo(reemp(\alpha)) \leq largo(\alpha)$
$P(\beta) = largo(reemp(\beta)) \leq largo(\beta)$

Ti) $P((\alpha aa\beta)) = largo(reemp((\alpha aa\beta))) \leq largo((\alpha aa\beta))$

Demo.

$$
\begin{aligned}
& largo(reemp((\alpha aa\beta))) \\
& = \text{(definición de } reemp\text{)} \\
& largo((reemp(\alpha)\#reemp(\beta))) \\
& = \text{(definición de } largo\text{)} \\
& largo(reemp(\alpha)) + largo(reemp(\beta)) + 3 \\
& \leq \text{(Hi))} \\
& largo(\alpha) + largo(\beta) + 3 \\
& < \text{(aritmética)} \\
& largo(\alpha) + largo(\beta) + 4 \\
& = \text{(definición de } largo\text{)} \\
& largo((\alpha aa\beta))
\end{aligned}
$$

d. $\mathcal{M} = \langle \mathcal{L}, R1, R2, F, e \rangle$

- $R1 = \mathcal{L}$
- $R2 = \{(x, y) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} / largo(x) \leq largo(y)\}$
- $F = reemp$, es posible ya que $reemp : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (**Demostrado en la parte b**)
- $e = bb$, $bb \in \mathcal{L}$ por la regla i) de la definición de $\mathcal{L}$
- $F \neq identidad$
  Según el ejemplo dado en la parte a) se cumple que $reemp((bb\#(bbaabb))) = (bb\#(bb\#bb))$, por lo tanto $reemp \neq id$

- $\mathcal{M} \models (\forall x)P_1(x)$

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models (\forall x)P_1(x) \\
\Leftrightarrow \text{ (2.4.5)} \\
(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})\mathcal{M} \models P_1(\bar{w}) \\
\Leftrightarrow \text{ (definición de } \models) \\
(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(v^{\mathcal{M}}(P_1(\bar{w})) = 1) \\
\Leftrightarrow \text{ (definición de } v^{\mathcal{M}})) \\
(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(w \in R1) \\
\Leftrightarrow \text{ (definición de } R1) \\
(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(w \in \mathcal{L}) \\
(\textbf{Trivial})
\end{array}$$

- $\mathcal{M} \models (\forall x)(P_2(f_1(x), x))$

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models (\forall x)(P_2(f_1(x), x)) \\
\Leftrightarrow \text{ (2.4.5)} \\
(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})\mathcal{M} \models P_2(f_1(\bar{w}), \bar{w}) \\
\Leftrightarrow \text{ (definición de } \models) \\
(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(v^{\mathcal{M}}(P_2(f_1(\bar{w}), \bar{w})) = 1) \\
\Leftrightarrow \text{ (definición de } v^{\mathcal{M}})) \\
(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})((F(w), w) \in R2) \\
\Leftrightarrow \text{ (definición de } R2, F) \\
(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(largo(reemp(w)) \leq largo(w)) \\
(\textbf{Demostrado en la parte c)})
\end{array}$$

- $\mathcal{M} \models (\exists x)(\exists y)\neg P_2(x, y)$

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models (\exists x)(\exists y)\neg P_2(x, y) \\
\Leftrightarrow \text{ (2.4.5)} \\
(\bar{\exists} w_1 \in \mathcal{L})(\bar{\exists} w_2 \in \mathcal{L})\mathcal{M} \models \neg P_2(\bar{w_1}, \bar{w_2}) \\
\Leftrightarrow \text{ (2.4.5)} \\
(\bar{\exists} w_1 \in \mathcal{L})(\bar{\exists} w_2 \in \mathcal{L})\mathcal{M} \not\models P_2(\bar{w_1}, \bar{w_2}) \\
\Leftrightarrow \text{ (definición de } \models) \\
(\bar{\exists} w_1 \in \mathcal{L})(\bar{\exists} w_2 \in \mathcal{L})(v^{\mathcal{M}}(P_2(\bar{w_1}, \bar{w_2})) = 0) \\
\Leftrightarrow \text{ (definición de } v^{\mathcal{M}})) \\
(\bar{\exists} w_1 \in \mathcal{L})(\bar{\exists} w_2 \in \mathcal{L})((w_1, w_2) \notin R2) \\
\Leftrightarrow \text{ (definición de } R2, F) \\
(\bar{\exists} w_1 \in \mathcal{L})(\bar{\exists} w_2 \in \mathcal{L})(largo(w_1) > largo(w_2)) \\
\Leftarrow \text{ (tomo } w_1 = (bbaabb) \in \mathcal{L},\ w_2 = bb \in \mathcal{L}\ ) \\
largo((bbaabb)) > largo(bb) \\
\Leftarrow \text{ (definición de } largo) \\
8 > 2
\end{array}$$

Ejercicio 2 (25 puntos)

Considere la siguiente estructura $\mathcal{M} = \langle \text{Personas}, \text{Estafador}, \text{Miente}, \text{Juan} \rangle$, de tipo de similaridad $\langle 1, 2; -; 1 \rangle$.

Estafador es el predicado que indica que una persona es un estafador; mientras que *Miente* indica que una persona le miente a otra.

a. Dé fórmulas en el lenguaje de primer orden que corresponde al tipo de similaridad dado, tales que interpretadas en $\mathcal{M}$ signifiquen lo siguiente:

- φ_1: "Las personas son estafadores si y sólo si le mienten a alguna persona".
- φ_2: "Las personas no son estafadores si y sólo si alguna persona les miente".
- φ_3: "Ningún estafador le miente a Juan".
- σ_1 : "Juan es estafador".
- σ_2 : "Juan no es estafador".
- σ_3 : "Nadie le miente a Juan".

b. Probar que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \nvdash \sigma_1 \wedge \sigma_2$.

c. Demuestre que para toda estructura $\mathcal{M}$, si $\mathcal{M} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$, entonces $\mathcal{M} \models \sigma_3$.

Bosquejo de solución

a.
- φ_1: "Las personas son estafadores si y sólo si le mienten a alguna persona".

$$(\forall x_1)(P_1(x_1) \leftrightarrow (\exists x_2)P_2(x_1, x_2))$$

- φ_2: "Las personas no son estafadores si y sólo si alguna persona les miente".

$$(\forall x_1)(\neg P_1(x_1) \leftrightarrow (\exists x_2)P_2(x_2, x_1))$$

- φ_3: "Ningún estafador le miente a Juan".

$$\neg(\exists x_1)(P_1(x_1) \wedge P_2(x_1, c_1))$$

- σ_1 : "Juan es estafador".

$$P_1(c_1)$$

- σ_2 : "Juan no es estafador".

$$\neg P_1(c_1)$$

- σ_3 : "Nadie le miente a Juan".

$$\neg(\exists x_1)P_2(x_1, c_1)$$

b.

$$\begin{array}{l} \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \nvdash \sigma_1 \wedge \sigma_2 \\ \Leftarrow \text{(correc.)} \\ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \not\models \sigma_1 \wedge \sigma_2 \\ \Leftrightarrow \text{(def} \models\text{)} \\ (\bar{\exists}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \text{ y } \mathcal{M} \not\models \sigma_1 \wedge \sigma_2) \end{array}$$

Primero probaremos que $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \vdash \bot$:

$$\dfrac{\dfrac{\sigma_1 \wedge \sigma_2}{\neg P_1(c_1)}\,E\wedge \quad \dfrac{\sigma_1 \wedge \sigma_2}{P_1(c_1)}\,E\wedge}{\bot}\,E\neg$$

Por lo tanto, ninguna estructura modela esta fórmula. Falta encontrar un modelo de $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$. Sea $\mathcal{M} = \langle \{1,2\}, \{1\}, \{(1,2)\}, 1 \rangle$.

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models \varphi_1 \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \varphi_1\text{)} \\
\mathcal{M} \models (\forall x_1)(P_1(x_1) \leftrightarrow (\exists x_2)P_2(x_1, x_2)) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\forall} a_1 \in \{1,2\})(a_1 \in \{1\} \Leftrightarrow (\bar{\exists} a_2 \in \{1,2\})(a_1, a_2) \in \{(1,2)\})
\end{array}$$

y esto se cumple, ya que si $a_1 = 1$ existe $a_2 = 2$ tal que $(a_1, a_2) = (1, 2)$, y si $a_1 = 2$ no existe ningún a_2 tal que $(2, a_2) = (1, 2)$.

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models \varphi_2 \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \varphi_2\text{)} \\
\mathcal{M} \models (\forall x_1)(\neg P_1(x_1) \leftrightarrow (\exists x_2)P_2(x_2, x_1)) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\forall} a_1 \in \{1,2\})(a_1 \notin \{1\} \Leftrightarrow (\bar{\exists} a_2 \in \{1,2\})(a_2, a_1) \in \{(1,2)\})
\end{array}$$

y esto se cumple, ya que si $a_1 = 1$ no existe ningún a_2 tal que $(a_2, 1) = (1, 2)$, y si $a_1 = 2$ existe $a_2 = 1$ tal que $(a_2, a_1) = (1, 2)$.

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models \varphi_3 \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \varphi_3\text{)} \\
\mathcal{M} \models \neg(\exists x_1)(P_1(x_1) \wedge P_2(x_1, c_1)) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
\text{no } (\bar{\exists} a_1 \in \{1,2\})(a_1 \in \{1\} \text{ y } (a_1, 1) \in \{(1,2)\})
\end{array}$$

lo cual se cumple.

c. Por completitud, alcanza con probar que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \vdash \sigma_3$:

$$\dfrac{\dfrac{[(\exists x_1)P_2(x_1,c_1)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi_3 \quad \dfrac{\dfrac{[P_1(x_1)]^3 \quad [P_2(x_1,c_1)]^2}{P_1(x_1) \wedge P_2(x_1,c_1)}\,I\wedge}{(\exists x_1)(P_1(x_1) \wedge P_2(x_1,c_1))}\,I\exists^{**}}{\bot}\,E\neg}{\neg P_1(x_1)}\,I\neg_3 \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi_1}{P_1(x_1) \leftrightarrow (\exists x_2)P_2(x_1,x_2)}\,E\forall^{***} \quad \dfrac{[P_2(x_1,c_1)]^2}{(\exists x_2)P_2(x_1,x_2)}\,I\exists^{****}}{P_1(x_1)}\,E\leftrightarrow}{\bot}\,E\neg}{\bot}\,E\exists_2^{*}}{\neg(\exists x_1)P_2(x_1,c_1)}\,I\neg_1$$

* x_1 no aparece libre en $\bot$ ni en φ_1 ni φ_3.

** x_1 libre para x_1 en $P_1(x_1) \wedge P_2(x_1, c_1)$.

*** x_1 libre para x_1 en $P_1(x_1) \leftrightarrow (\exists x_2)P_2(x_1, x_2)$.

**** c_1 libre para x_2 en $P_2(x_1, x_2)$

Ejercicio 3 (25 puntos)

a. Construya una derivación, un elemento de `DER`, que pruebe el siguiente juicio:

$$(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge \neg P(y)) \vdash \neg(\forall x)(\forall y)x =' y$$

b. Construya una derivación, un elemento de `DER`, que pruebe el siguiente juicio:

$$(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow y =' f(x)) \vdash (\forall x)P(x, f(x))$$

c. Justifique por qué se cumple lo siguiente:

$$(\forall x)P(x, f(x)) \nvdash (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow y =' f(x))$$

Bosquejo de solución

a. $(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge \neg P(y)) \vdash \neg(\forall x)(\forall y)x =' y$

$$\dfrac{\dfrac{(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge \neg P(y)) \qquad \dfrac{[(\exists y)(P(x) \wedge \neg P(y))]_2 \qquad \dfrac{\dfrac{[P(x) \wedge \neg P(y)]_3}{\neg P(y)}\,E_{\wedge 2} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall x)(\forall y)x =' y]_1}{(\forall y)x =' y}\,E_{\forall}^{*3}}{x =' y}\,E_{\forall}^{*2} \qquad \dfrac{[P(x) \wedge \neg P(y)]_3}{P(x)}\,E_{\wedge 1}}{P(y)}\,RI_4^{*4}}{\bot}\,E_{\neg}}{\bot}\,E\exists_3^{*1}}{\bot}\,E\exists_2^{*1}}{\neg(\forall x)(\forall y)x =' y}\,I\neg_1$$

*1 No hay variables libres en $(\forall x)(\forall y)x =' y$ ni en $\bot$

*2 y está libre para y en $x =' y$

*3 x está libre para x en $(\forall y)x =' y$

*4 x está libre para z en $P(z)$ y y está libre para z en $P(z)$ porque $P(z)$ es abierta.

b. $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow y =' f(x)) \vdash (\forall x)P(x, f(x))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow y =' f(x))}{(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow y =' f(x))}\,E_{\forall}^{*3}}{P(x, f(x)) \leftrightarrow f(x) =' f(x)}\,E_{\forall}^{*2} \qquad \dfrac{}{f(x) =' f(x)}\,RI_1}{P(x, f(x))}\,E_{\leftrightarrow 2}}{(\forall x)P(x, f(x))}\,I_{\forall}^{*1}$$

*1 x no está libre en $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow y =' f(x))$

*2 $f(x)$ está libre para y en $P(x,y) \leftrightarrow y =' f(x)$ por ser abierta.

*3 x está libre para x en $(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow y =' f(x))$

c. Justifique por qué se cumple lo siguiente:

$$(\forall x)P(x, f(x)) \nvdash (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow y =' f(x))$$

Hay que probar el siguiente teorema:

T) $(\forall x)P(x, f(x)) \nvdash (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow y =' f(x))$

Dem.)

Sea U el conjunto $\{0,1\}$ e $\texttt{id} : U \to U$ la función identidad. Considere la estructura $\langle U, U \times U, \texttt{id}\rangle$, a la que llamamos $\mathcal{M}$.

Observemos que:

$\mathcal{M} \models (\forall x)P(x, f(x))$
$\Leftarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in U)\mathcal{M} \models P(\bar{a}, f(\bar{a}))$
$\Leftarrow$ (Def.)
$(\bar{\forall} a \in U)\langle a, a\rangle \in U \times U$,
lo que es inmediato, y ...

$\mathcal{M} \not\models (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow y =' f(x))$
$\Leftarrow$ (2.4.5)
$\mathcal{M} \not\models P(\bar{0}, \bar{1}) \leftrightarrow \bar{1} =' f(\bar{0})$
$\Leftarrow$ (2.4.5)
$\mathcal{M} \models P(\bar{0}, \bar{1})$ y $\mathcal{M} \not\models \bar{1} =' f(\bar{0})$
$\Leftarrow$ (Def.)
$\langle 0, 1\rangle \in U \times U$ y $1 \neq 0$,
lo que también es inmediato.

Luego, $(\forall x)P(x, f(x)) \not\models (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow y =' f(x))$ y el teorema de consistencia garantiza que $(\forall x)P(x, f(x)) \nvdash (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow y =' f(x))$.

Ejercicio 4 (25 puntos)

Sean los siguientes conjuntos incluídos en SENT

$$\Gamma = \{(\forall x)R(x,x), (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \to R(y,x)), (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \to R(y,z) \to R(x,z))\}$$

$$\Delta = \{(\forall x)R(x,x), (\exists x)(\exists y)(R(x,y) \land \neg R(y,x)), (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \to R(y,z) \to R(x,z))\}$$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique su respuesta:

a. $\mathit{Th}(\mathit{Mod}(\Gamma \cap \Delta)) \neq \texttt{SENT}$
b. $\mathit{Th}(\mathit{Mod}(\Gamma \cup \Delta)) = \texttt{SENT}$
c. $\mathit{Mod}(\Gamma - \Delta) = \emptyset$
d. $\mathit{Mod}(\Gamma) - \mathit{Mod}(\Delta) \neq \emptyset$

Bosquejo de solución

a. **Verdadero**

Sea $\mathcal{M} = \langle\{\circ\}, \{(\circ,\circ)\}\rangle$, vamos a probar $\mathcal{M} \models \Gamma \cap \Delta$
siendo $\Gamma \cap \Delta = \{(\forall x)R(x,x), (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \to R(y,z) \to R(x,z))\}$

$\mathcal{M} \models (\forall x)R(x,x)$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 e interpretación)
$(\bar{\forall} a \in \|\mathcal{M}\|) : (a,a) \in R^{\mathcal{M}}$
$\Leftrightarrow$ (Definición de $\mathcal{M}$)
$(\circ,\circ) \in \{(\circ,\circ)\}$
$\square$

$\mathcal{M} \models (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \to R(y,z) \to R(x,z))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 e interpretación)
$(\bar{\forall} a \in \|\mathcal{M}\|)(\bar{\forall} b \in \|\mathcal{M}\|)(\bar{\forall} c \in \|\mathcal{M}\|)((a,b) \in R^{\mathcal{M}} \Rightarrow (b,c) \in R^{\mathcal{M}} \Rightarrow (a,c) \in R^{\mathcal{M}})$
$\Leftrightarrow$ (Definición de $\mathcal{M}$)
$(\circ,\circ) \in \{(\circ,\circ)\} \Rightarrow (\circ,\circ) \in \{(\circ,\circ)\} \Rightarrow (\circ,\circ) \in \{(\circ,\circ)\}$
$\square$

Con lo anterior probamos que $\mathcal{M} \in Mod(\Gamma \cap \Delta)$ (definición de Mod)

Por otro lado sabemos que $\mathcal{M} \not\models \bot$ (definición de $\models$)

Por lo tanto: $\bot \notin Th(Mod(\Gamma \cap \Delta))$ (definición de Th)
y se concluye que $Th(Mod(\Gamma \cap \Delta)) \neq \texttt{SENT}$

b. **Verdadero**

Por propiedad de práctico $Th(Mod(\Gamma \cup \Delta)) = CONS(\Gamma \cup \Delta)$.
Vamos a probar $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{SENT})(\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi)$. Sea $\varphi \in \texttt{SENT}$ arbitrario.

$$\dfrac{\dfrac{(\exists x)(\exists y)(R(x,y) \wedge \neg R(y,x)) \qquad \dfrac{[(\exists y)(R(x,y) \wedge \neg R(y,x))]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[R(x,y) \wedge \neg R(y,x)]^2}{\neg R(y,x)}E\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \to R(y,x))}{(\forall y)(R(x,y) \to R(y,x))}E\forall^{*4}}{R(x,y) \to R(y,x)}E\forall^{*3} \qquad \dfrac{[R(x,y) \wedge \neg R(y,x)]^2}{R(x,y)}E\wedge}{R(y,x)}E\to}{\bot}E\neg}{\bot}E\exists_2^{*2}}{\bot}E\exists_1^{*1}}{\varphi}E\bot$$

*1 No hay variables libres $\bot$ ni en $(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \to R(y,x))$.

*2 No hay variables libres $\bot$ ni en $(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \to R(y,x))$.

*3 y está libre para y en $R(x,y) \to R(y,x)$

*4 x está libre para x en $(\forall y)(R(x,y) \to R(y,x))$

c. **Falso**

Sea $\mathcal{M} = \langle \{\circ\}, \{(\circ,\circ)\} \rangle$, vamos a probar $\mathcal{M} \models \Gamma - \Delta$ y por lo tanto $\mathcal{M} \in Mod(\Gamma - \Delta)$, lo que implica $Mod(\Gamma - \Delta) \neq \emptyset$

$\mathcal{M} \models \Gamma - \Delta$
$\Leftrightarrow$ (def. $\Gamma - \Delta$)
$\mathcal{M} \models (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \to R(y,x))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 e interpretación)
$(\bar{\forall} a \in \|\mathcal{M}\|)(\bar{\forall} b \in \|\mathcal{M}\|)((a,b) \in R^{\mathcal{M}} \Rightarrow (b,a) \in R^{\mathcal{M}})$
$\Leftrightarrow$ (Definición de $\mathcal{M}$)
$(\circ,\circ) \in \{(\circ,\circ)\} \Rightarrow (\circ,\circ) \in \{(\circ,\circ)\}$
$\square$

d. **Verdadero**

Alcanza con encontrar un modelo de Γ que no sea modelo de Δ.

Por la parte b) sabemos que no existen modelos de $\Gamma \cup \Delta$. Esto significa que todo modelo de Γ no será modelo de Δ.

Por lo tanto, alcanza con encontrar un modelo de Γ.

Sea $\mathcal{M} = \langle \{\circ\}, \{(\circ, \circ)\} \rangle$.

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models (\forall x)R(x,x)\text{(por parte a)} \\
\mathcal{M} \models (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \to R(y,x))\text{(por parte c)} \\
\mathcal{M} \models (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x,y) \to R(y,z) \to R(x,z))\text{(por parte a)} \\
\Rightarrow \text{(definición de } \Gamma\text{)} \\
\mathcal{M} \models \Gamma
\end{array}
$$