Examen de Lógica y Lógica modalidad al Revés

25 de julio de 2017

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(40 puntos)

Considere un lenguaje $\mathcal{L}$ de primer orden con igualdad de tipo $\langle -; -; 0\rangle$ y la siguiente fórmula:

$$\psi \equiv (\forall x_1)(\forall x_2)x_1 =' x_2$$

a. Defina el lenguaje de los términos de $\mathcal{L}$: $\mathtt{TERM}_{\mathcal{L}}$.

b. Defina el lenguaje de las fórmulas de $\mathcal{L}$: $\mathtt{FORM}_{\mathcal{L}}$, solamente con los conectivos $\forall, \wedge, \neg, \bot$.

c. I. Demuestre que $(\bar{\forall} j \in \mathbb{N})(\psi \vdash x_2 =' x_j)$

   II. Demuestre que $(\bar{\forall} i \in \mathbb{N})(\bar{\forall} j \in \mathbb{N})(i \neq 2 \Rightarrow \psi \vdash x_i =' x_j)$

d. Considere la siguiente propiedad: $(\bar{\forall} \varphi \in \mathtt{FORM}_{\mathcal{L}})(\psi \vdash \varphi \text{ o } \psi \vdash \neg\varphi)$

   I. Dé la estructura de la prueba inductiva de la propiedad anterior. Debe incluir todos los pasos con sus respectivas hipótesis y tesis. No incluir las demostraciones.

   II. Demuestre TODOS los pasos bases y SOLO el paso inductivo correspondiente al $\forall$ de la prueba anterior.

Bosquejo de solución

a. Observar que en el lenguaje sólo hay variables, lo que hace que $\mathtt{TERM}_{\mathcal{L}}$ sea el siguiente:

   I $x_i \in \mathtt{TERM}_{\mathcal{L}}$ si $i \in \mathcal{N}$

b. El lenguaje pedido es el siguiente:

   I $\bot \in \mathtt{FORM}_{\mathcal{L}}$

   II $x_i =' x_j \in \mathtt{FORM}_{\mathcal{L}}$ si $i, j \in \mathcal{N}$

   III $(\neg\alpha) \in \mathtt{FORM}_{\mathcal{L}}$ si $\alpha \in \mathtt{FORM}_{\mathcal{L}}$

   IV $(\alpha \wedge \beta) \in \mathtt{FORM}_{\mathcal{L}}$ si $\alpha, \beta \in \mathtt{FORM}_{\mathcal{L}}$

   V $(\forall x_i)\alpha \in \mathtt{FORM}_{\mathcal{L}}$ si $i \in \mathcal{N}$ y $\alpha \in \mathtt{FORM}_{\mathcal{L}}$

c. I. **T)** $(\bar{\forall} j \in \mathbb{N})((\forall x_1)(\forall x_2)x_1 =' x_2 \vdash x_2 =' x_j)$

Dem.

Sea $j \in \mathbb{N}$. Se considera la variable x_{j+3}, necesariamente distinta de x_1, x_2, x_j. La siguiente derivación es válida.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x_1)(\forall x_2)x_1 =' x_2}{(\forall x_2)x_{j+3} =' x_2}\, E_\forall^{iv}}{x_{j+3} =' x_j}\, E_\forall^{iii}}{(\forall x_{j+3})x_{j+3} =' x_j}\, I_\forall^{ii}}{x_2 =' x_j}\, E_\forall^{i}$$

^{i} La eliminación de $\forall$ es correcta porque x_2 está libre para x_{j+3} en $x_{j+3} =' x_j$.
^{ii} La introducción de $\forall$ es correcta porque $(\forall x_1)(\forall x_2)x_1 =' x_2$ no tiene variables libres.
^{iii} La eliminación de $\forall$ es correcta porque x_j está libre para x_2 en $x_{j+3} =' x_2$.
^{iv} La eliminación de $\forall$ es correcta porque x_{j+3} está libre para x_1 en $(\forall x_2)x_1 =' x_2$.

□

II. **H)** $i \neq 2$

T) $\psi \vdash x_i =' x_j$

Dem.

$$\dfrac{\dfrac{(\forall x_1)(\forall x_2)x_1 =' x_2}{(\forall x_2)x_i =' x_2}\, E_\forall^{ii}}{x_i =' x_j}\, E_\forall^{i}$$

^{i} La eliminación de $\forall$ es correcta porque x_j está libre para x_2 en $x_i =' x_2$.
^{ii} La eliminación de $\forall$ es correcta porque x_i está libre para x_1 en $(\forall x_2)x_1 =' x_2$ dado que $i \neq 2$.

□

d. I. La demostración por inducción debe seguir el Principio de Inducción Primitiva para $\mathtt{FORM}_\mathcal{L}$, por lo que hay que demostrar los siguientes teoremas:

PB1) $(\bot)$

T) $\psi \vdash \bot$ o $\psi \vdash \neg\bot$

□

PB2) $(=')$

T) $\psi \vdash x_i =' x_j$ o $\psi \vdash \neg x_i =' x_j$

□

PI1) $(\neg)$

H) $\psi \vdash \varphi$ o $\psi \vdash \neg\varphi$

T) $\psi \vdash \neg\varphi$ o $\psi \vdash \neg\neg\varphi$

□

PI2) $(\wedge)$

H) $\psi \vdash \varphi_1$ o $\psi \vdash \neg\varphi_1$
$\psi \vdash \varphi_2$ o $\psi \vdash \neg\varphi_2$

T) $\psi \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$ o $\psi \vdash \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$

□

PI3) $(\forall)$

H) $\psi \vdash \varphi$ o $\psi \vdash \neg\varphi$

T) $\psi \vdash (\forall x)\varphi$ o $\psi \vdash \neg((\forall x)\varphi)$

$\square$

II. **PB1)** $(\bot)$

T) $\psi \vdash \bot$ o $\psi \vdash \neg\bot$

Dem.

La siguiente derivación permite afirmar que $\vdash \neg\bot$

$$\dfrac{[\bot]^1}{\neg\bot}\, I_\neg(1)$$

y también es posible afirmar que $\psi \vdash \neg\bot$, por lo tanto se cumple la tesis.

$\square$

PB2) $(='\,)$

T) $\psi \vdash x_i =' x_j$ o $\psi \vdash \neg x_i =' x_j$

Dem.

En la parte c de este ejercicio se demostró que $\psi \vdash x_i =' x_j$ para cualquier i, j por lo tanto se cumple la tesis.

$\square$

PI3) $(\forall)$

H) $\psi \vdash \varphi$ o $\psi \vdash \neg\varphi$

T) $\psi \vdash (\forall x)\varphi$ o $\psi \vdash \neg((\forall x)\varphi)$

Dem.

Si $\psi \vdash \varphi$, entonces en un paso más por introducción de $\forall$ se puede derivar $(\forall x)\varphi$. Esa derivación es correcta dado que la única hipótesis es ψ y es cerrada, por lo que no tiene x libre. Esto prueba $\psi \vdash (\forall x)\varphi$.

Si $\psi \vdash \neg\varphi$, entonces se puede hacer la siguiente derivación siendo d la derivación que justifica la afirmación anterior:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\psi\\ \bigtriangledown d\end{matrix}}{\neg\varphi} \qquad \cfrac{[(\forall x)\varphi]_1}{\varphi}\,E^*_\forall}{\bot}\,E_\neg}{\neg(\forall x)(\varphi)}\,I_{\neg(1)}$$

* La eliminación de $\forall$ es correcta porque x está libre para x en φ.

$\square$

Ejercicio 2 (30 puntos)

a. Sean $\Gamma \subset SENT$ y $\varphi \in SENT$ tales que:

1) $(\bar{\exists}\mathcal{M}_1 \in Mod(\Gamma))\mathcal{M}_1 \not\models \varphi$
2) $(\bar{\exists}\mathcal{M}_2 \in Mod(\Gamma))\mathcal{M}_2 \not\models \neg\varphi$

Pruebe que $\textsc{Cons}(\Gamma)$ no es consistente maximal.

b. Considere la fórmula ψ del ejercicio 1 ($\psi \equiv (\forall x_1)(\forall x_2)x_1 =' x_2$).

 I. Demuestre que: $Mod(\{\psi\}) = \{\mathcal{M}/\#(|\mathcal{M}|) = 1\}$ donde $\#$ es la cardinalidad del conjunto.

 II. Considere un lenguaje de tipo de similaridad $\langle 1; -; 0\rangle$.
 Pruebe que $\textsc{Cons}(\{\psi\})$ **no es** consistente maximal.

 III. Considere el lenguaje del ejercicio 1.
 Pruebe que $\textsc{Cons}(\{\psi\})$ **es** consistente maximal.

Bosquejo de solución

a. Probaremos que no se cumple la consistencia maximal de Γ probando que:

 (A) $\varphi \notin \textsc{Cons}(\Gamma)$

 (B) $\textsc{Cons}(\Gamma) \cup \{\varphi\}$ es consistente.

 Probamos (A):

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_1 \models \Gamma \text{ y } \mathcal{M}_1 \not\models \varphi \\ \Rightarrow \text{(definición de } \models) \\ \Gamma \not\models \varphi \\ \Rightarrow \text{(corrección)} \\ \Gamma \nvdash \varphi \\ \Rightarrow \text{(definición } \textsc{Cons}) \\ \varphi \notin \textsc{Cons}(\Gamma) \end{array}$$

 Luego probamos que el conjunto $\textsc{Cons}(\Gamma) \cup \{\varphi\}$ es consistente, mostrando que $\mathcal{M}_2$ es un modelo de ese conjunto:

 Primero probamos que $\mathcal{M}_2 \models \varphi$:

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_2 \not\models \neg\varphi \quad \text{(por 2))} \\ \Rightarrow \text{(2.4.5)} \\ \mathcal{M}_2 \models \neg\neg\varphi \\ \Rightarrow \text{(equivalencia)} \\ \mathcal{M}_2 \models \varphi \end{array}$$

 Sabemos que $\mathcal{M}_2 \models \Gamma$ (por 2)), probaremos que $\mathcal{M}_2 \models \textsc{Cons}(\Gamma)$:

$$\begin{array}{l} \alpha \in \textsc{Cons}(\Gamma) \\ \Rightarrow \text{(definición } \textsc{Cons}) \\ \Gamma \vdash \alpha \\ \Rightarrow \text{(correctitud)} \\ \Gamma \models \alpha \\ \Rightarrow \text{(definición de } \models \text{)} \\ \mathcal{M}_2 \models \alpha \end{array}$$

 De lo anterior concluimos que $\mathcal{M}_2 \models \textsc{Cons}(\Gamma)$ y queda completa la prueba.

b. I. Se probará que

$$Mod(\{\psi\}) = \{\mathcal{M}/\#(|\mathcal{M}|) = 1\}$$

O sea, que $Mod(\{\psi\})$ es el conjunto de las estructuras (del tipo indicado) que tienen sólo un elemento en el universo. Lo justificamos con los siguientes dos teoremas.

H) $\mathcal{M} \in Mod(\{\psi\})$

T) $\#(|\mathcal{M}|) = 1$

Dem.

Como $\mathcal{M} \in Mod(\{\psi\})$, esa estructura cumple que $\mathcal{M} \models \psi$. Luego, tiene que cumplir (por 2.4.5 y la definición de $\models$) que:

$$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)a = b$$

Dado que todos los elementos del universo de $\mathcal{M}$ tiene que ser iguales entre sí y el universo de las estructuras es no vacío, sólo puede tener un elemento, por lo que su cardinalidad es uno.

$\square$

H) $\mathcal{M} \notin Mod(\{\psi\})$

T) $\#(|\mathcal{M}|) > 1$

Dem.

Como $\mathcal{M} \notin Mod(\{\psi\})$, esa estructura cumple que $\mathcal{M} \not\models \psi$. Luego, tiene que cumplir (por 2.4.5 y la definición de $\models$) que:

$$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)a \neq b$$

O sea, el universo de $\mathcal{M}$ cuenta al menos con dos elementos, por lo que su cardinalidad es mayor que uno.

$\square$

Observar que esta última demostración corresponde al contrarecíproco de $\#(|\mathcal{M}|) = 1 \Rightarrow \mathcal{M} \in Mod(\{\psi\})$

II. **H)** Sea un lenguaje de tipo de similaridad $\langle 1; -; 0\rangle$.

T) En este lenguaje, $\textsc{Cons}(\{\psi\})$ no es consistente maximal.

Dem.

Sea $\sigma \equiv (\forall x)P(x)$.

La estructura $\mathcal{M}_1 = \langle\{1\}, \emptyset\rangle$ cumple que tiene sólo un elemento en su universo, por lo que se cumple que $\mathcal{M}_1 \in Mod(\{\psi\})$ de acuerdo a lo demostrado en la parte anterior.

Por otra parte, $\mathcal{M}_1 \not\models \sigma$ ya que si lo hiciera, por 2.4.5 debería cumplir que $(\bar{\forall} a \in \{1\})a \in \emptyset$ lo cual es obviamente falso.

Ahora analicemos que ocurre con $\neg\sigma$.

La estructura $\mathcal{M}_2 = \langle\{1\}, \{1\}\rangle$ cumple que $\mathcal{M}_2 \models \sigma$ porque la relación asociada al predicado P incluye a todo el universo. Dado que $\mathcal{M}_2 \models \sigma$, entonces por 2.4.5 $\mathcal{M}_2 \not\models \neg\sigma$.

Además, como tiene un único elemento en el universo, entonces $\mathcal{M}_2 \models \psi$ por lo demostrado en la parte anterior de este mismo ejercicio.

De esta forma, se probó que:

$$\mathcal{M}_1 \in Mod(\{\psi\}) \text{ y } \mathcal{M}_1 \not\models \sigma \tag{1}$$

$$\mathcal{M}_2 \in Mod(\{\psi\}) \text{ y } \mathcal{M}_2 \not\models \neg\sigma \tag{2}$$

Por lo que probamos que $\{\psi\}$ está en las condiciones descriptas para Γ en la parte a. de este ejercicio, por lo que $\textsc{Cons}(\{\psi\})$ no es consistente maximal.

$\square$

III. En las partes anteriores se mostraron estructuras que modelan a ψ. Por lo tanto, tanto ψ como $\textsc{Cons}(\{\psi\})$ son consistenes.(Análogo a la prueba de $\mathcal{M}_2 \models \textsc{Cons}(\Gamma)$ en la parte a de este ejercicio).

Consideremos ahora $\varphi \in \texttt{SENT}$ arbitraria. Luego,

$$
\begin{array}{l}
\varphi \notin \textsc{Cons}(\{\psi\}) \\
\Rightarrow \text{(Def. Cons)} \\
\psi \nvdash \varphi \\
\Rightarrow \text{(Ej.1)} \\
\psi \vdash \neg\varphi \\
\Rightarrow (E\neg) \\
\psi, \varphi \vdash \bot \\
\Rightarrow \text{(Inclusión de las premisas)} \\
\textsc{Cons}(\{\psi\}) \cup \{\varphi\} \vdash \bot,
\end{array}
$$

y por lo tanto $\textsc{Cons}(\{\psi\}) \cup \{\varphi\}$ no es consistente.

Luego, concluímos que $\textsc{Cons}(\{\psi\})$ es consistente maximal.

Ejercicio 3 (30 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $(\forall x)P(f(x)), (\exists x)(\forall y)(\neg P(x) \wedge f(y) =' x) \vdash P(c)$

b. $(\forall y)(\forall x)(Q(x,y) \to Q(y,x)), (\forall x)Q(x,c) \vdash (\forall x)(\forall y)(\neg Q(x,y) \to \neg x =' c)$

En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas.

Bosquejo de solución

a. $(\forall x)P(f(x)), (\exists x)(\forall y)(\neg P(x) \wedge f(y) =' x) \vdash P(c)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\exists x)(\forall y)(\neg P(x) \wedge f(y) =' x)$}
\AxiomC{$[(\forall y)(\neg P(x) \wedge f(y) =' x)]^1$}
\RightLabel{$E_\forall(*_3)$}
\UnaryInfC{$\neg P(x) \wedge f(y) =' x$}
\RightLabel{$E_{\wedge 2}$}
\UnaryInfC{$f(y) =' x$}
\RightLabel{$RI2$}
\UnaryInfC{$x =' f(y)$}
\AxiomC{$[(\forall y)(\neg P(x) \wedge f(y) =' x)]^1$}
\RightLabel{$E_\forall(*_4)$}
\UnaryInfC{$\neg P(x) \wedge f(y) =' x$}
\RightLabel{$E_{\wedge 1}$}
\UnaryInfC{$\neg P(x)$}
\RightLabel{$RI4(*_2)$}
\BinaryInfC{$\neg P(f(y))$}
\AxiomC{$(\forall x)P(f(x))$}
\RightLabel{$E_\forall(*_5)$}
\UnaryInfC{$P(f(y))$}
\RightLabel{$E_\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$E_\exists^1(*_1)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$E_\bot$}
\UnaryInfC{$P(c)$}
\end{prooftree}
$$

$(*_1)$ $x \notin FV(\{\bot,\ (\forall x)P(f(x))\})$.

$(*_2)$ x libre para z en $\neg P(z)$ y $f(y)$ libre para z en $\neg P(z)$.

$(*_3)(*_4)$ y libre para y en $\neg P(x) \wedge f(y) =' x$.

$(*_5)$ y libre para x en $P(f(x))$.

b. $(\forall y)(\forall x)(Q(x,y) \to Q(y,x)), (\forall x)Q(x,c) \vdash (\forall x)(\forall y)(\neg Q(x,y) \to \neg x =' c)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x =' c]^1 \quad [\neg Q(x,y)]^2}{\neg Q(c,y)}\,RI4(*4) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall y)(\forall x)(Q(x,y) \to Q(y,x))}{(\forall x)(Q(x,c) \to Q(c,x))}\,E_\forall(*1)}{Q(y,c) \to Q(c,y)}\,E_\forall(*2) \qquad \dfrac{(\forall x)Q(x,c)}{Q(y,c)}\,E_\forall(*3)}{Q(c,y)}\,E_\to}{\bot}\,E_\neg}{\neg x =' c}\,I_\neg(1)}{\neg Q(x,y) \to \neg x =' c}\,I_\to(2)}{(\forall y)(\neg Q(x,y) \to \neg x =' c)}\,I_\forall(*5)}{(\forall x)(\forall y)(\neg Q(x,y) \to \neg x =' c)}\,I_\forall(*6)
$$

(*1) c está libre para y en cualquier fórmula.

(*2) y está libre para x en $Q(x,c) \to Q(c,x)$

(*3) y está libre x en $Q(x,c)$

(*4) x está libre para z en $\neg Q(z,y)$ y c está libre para z en $\neg Q(z,y)$

(*5) $y \notin FV(\{(\forall y)(\forall x)(Q(x,y) \to Q(y,x)), (\forall x)Q(x,c)\})$

(*6) $x \notin FV(\{(\forall y)(\forall x)(Q(x,y) \to Q(y,x)), (\forall x)Q(x,c)\})$