Examen de Lógica

07 de Febrero de 2017

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Se le llama función de Alto Orden a una función que recibe como parámetro o devuelve como resultado otra función. Para definir funciones de esta clase, uno de los parámetros se usa como una función en su definición. Ej:

$$f(g,x) = g(x) + 1 \text{ y } f(succ, 1) = 3, f(^2, 5) = 26$$

a. Defina el conjunto $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ de las listas de naturales con el símbolo $|$ como separador y $[]$ como la lista vacía. Use a los naturales como conjunto base cuando sea necesario.

   Ejs: $[]$ es la lista vacía. $15|2|31|[]$ es una lista que contiene al 15, 2 y 31 en ese orden.

b. Defina la función $Reduce : (\mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}) \times \mathcal{N} \times \mathcal{L}_{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$. Esta función recibe una función binaria de naturales en naturales, un natural y una lista, devolviendo un natural que es la aplicación de la función sobre todos los elementos de la lista. El natural es el valor a devolver en el caso de la lista vacía y usualmente es el neutro de la operación.

Ejemplos
$Reduce(*, 1, []) = 1$
$Reduce(*, 1, 2\|3\|4\|[]) = 2 * 3 * 4 * 1 = 24$
$g(x,y) = x * (y+1)$ $Reduce(g, 0, 2\|3\|4\|[]) = g(2, g(3, g(4, 0))) = 32$

c. Demuestre que $f(l) = Reduce(+, 0, l)$ devuelve la suma de todos los naturales contenidos en la lista l o 0 si la lista es vacía.

Bosquejo de solución

a. El lenguaje $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ queda definido por las siguientes reglas:

   a) $[] \in \mathcal{L}_{\mathcal{N}}$

   b) Si $l \in \mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces $n|l \in \mathcal{L}_{\mathcal{N}}$

b. Se define la función *Reduce*:

$$\begin{aligned} Reduce(f,n,[]) &= n \\ Reduce(f,n,m|l) &= f(m, Reduce(f,n,l)) \end{aligned}$$

c. Demostración por PIP en $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ para probar:

$P(l) := f(l)$*devuelve la suma de todos los naturales contenidos en* l *o* 0 *si* $l = []$

Paso base

T) $P([]) = f([])$*devuelve la suma de todos los naturales contenidos en* $[]$ *o* 0 *si* $[] = []$

Demo.

$$\begin{aligned} & f([]) \\ & = \text{(def. f)} \\ & Reduce(+,0,[]) \\ & = \text{(def. Reduce)} \\ & 0 \end{aligned}$$

Paso inductivo

HI) $P(l) = f(l)$*devuelve la suma de todos los naturales contenidos en* l *o* 0 *si* $l = []$

TI) $P(n|l) = f(n|l)$*devuelve la suma de todos los naturales contenidos en* $n|l$ *o* 0 *si* $n|l = []$

Demo.

$$\begin{aligned} & f(n|l) \\ & = (def.f) \\ & Reduce(+,0,n|l) \\ & = (def.Reduce) \\ & n + Reduce(+,0,l) \\ & = (def.f) \\ & n + f(l) \end{aligned}$$

por la HI $f(l)$ devuelve la suma de todos los naturales contenidos en l o 0 si l es vacía y $f(n|l) = n + f(l)$ entonces $f(n|l)$ devuelve la suma de los naturales en $n|l$.

Por lo demostrado en el paso base, los pasos inductivos y la aplicación del PIP para $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ queda demostrada la propiedad:

$f(l)$*devuelve la suma de todos los naturales contenidos en* l *o* 0 *si* $l = []$

Ejercicio 2 (25 puntos)

a. Demuestre que para dos fórmulas cualesquiera φ y ψ se cumple que:

Si (para toda estructura A del tipo adecuado $(A \models \varphi \Rightarrow A \models \psi)$) entonces $(\models \varphi \Rightarrow \models \psi)$.

b. Considere el siguiente conjunto y la siguiente función $F : C \to C$:

$$\begin{aligned} C &\equiv \{\bullet, \circ, \#\} \\ F(x,y) &\equiv \begin{cases} x \text{ si } & x \neq y \\ \# \text{ si } & x = y \end{cases} \end{aligned}$$

I. Escriba una estructura $\mathcal{M}_1 = \langle C, A_1, A_2, F, \# \rangle$ de tipo de similaridad $\langle 2,2;2;1 \rangle$ en donde:

- $|A_1| \geq 3$ y $|A_2| \geq 2$.
- $(\bar{\forall} x \in C)\, \langle x, x \rangle \notin A_1$ y $\langle x, x \rangle \notin A_2$
- $(\bar{\forall} x, y \in C)$ Si $\langle x, y \rangle \in A_1$ entonces $((\bar{\exists} z \in C)((x \neq z)$ y $\langle x, z \rangle \notin A_1))$
- $(\bar{\forall} x, y \in C)$ Si $\langle x, y \rangle \in A_2$ entonces $(\langle x, y \rangle \notin A_1$ y $x \neq \#)$

II. Indique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

$$\mathcal{M}_1 \models \forall x \forall y (\neg f_1(x, y) =' c_1 \to (x =' c_1 \lor y =' c_1))$$

III. Indique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

$$\mathcal{M}_1 \models \forall x \forall y (P_2(x, y) \to \neg f_1(x, y) =' c_1)$$

Bosquejo de solución

a. Lo que hay que probar es que :

H) Para toda estructura A del tipo adecuado, $A \models \varphi \Rightarrow A \models \psi$

T) $\models \varphi \Rightarrow \models \psi$

□

Como la tesis de este teorema es una implicación lo que se debe probar es que cuando se cumple el antecedente de la misma se cumple el consecuente. Por lo tanto probaremos el siguiente teorema:

H) Para toda estructura A del tipo adecuado, $A \models \varphi \Rightarrow A \models \psi$
$\models \varphi$

T) $\models \psi$

Dem.

1 Por hipótesis se cumple $\models \varphi$.

2 Por definición de $\models$, esto significa que:

Para cualquier estructura A del tipo adecuado, $A \models \varphi$.

3 Tomando una estructura A_1 arbitraria del tipo adecuado, $A_1 \models \varphi$.

4 Dada la hipótesis del teorema, entonces se cumple que: $A_1 \models \psi$

5 Dado que A_1 es una estructura arbitraria del tipo adecuado, entonces se cumple que:

Para cualquier estructura A del tipo adecuado, $A \models \psi$.

6 Esto último, por la definición de $\models \alpha$ significa que $\models \psi$

□

b. I. Para construir la estructura se deben elegir cuál es exactamente el contenido de los conjuntos A_1 y A_2.

Dado que las relaciones A_1 y A_2 son binarias, deberían ser subconjuntos del producto cartesiano $C \times C$. Ese producto cartesiano tiene las siguientes parejas:

$$\begin{array}{c}
\langle \bullet, \bullet \rangle \\
\langle \bullet, \circ \rangle \\
\langle \bullet, \# \rangle \\
\langle \circ, \circ \rangle \\
\langle \circ, \# \rangle \\
\langle \circ, \bullet \rangle \\
\langle \#, \# \rangle \\
\langle \#, \circ \rangle \\
\langle \#, \bullet \rangle
\end{array}$$

Ahora consideraremos las restricciones para ver cuáles son los elementos de los conjuntos.

Conviene considerar a partir de la segunda restricción, dado que la primera sólo impone condiciones de cardinalidad y no condiciona realmente qué parejas hay en el conjunto.

$(\bar{\forall} x \in C)\ \langle x, x \rangle \notin A_1$ **y** $\langle x, x \rangle \notin A_2$**:** La condición indica que ninguna de las dos relaciones pueden contener parejas con sus componentes iguales, lo que hace que NO se deban considerar las siguientes parejas como su contenido: $\langle \bullet, \bullet \rangle, \langle \circ, \circ \rangle, \langle \#, \# \rangle$. Esto hace que, para cada elemento de C, sólo se puedan considerar dos parejas que lo tengan como primer elemento, lo que restringe a 6 la cantidad de parejas disponibles para las relaciones.

$(\bar{\forall} x, y \in C)$ **Si** $\langle x, y \rangle \in A_1$ **entonces** $((\bar{\exists} z \in C)((x \neq z)$ **y** $\langle x, z \rangle \notin A_1))$**:** La condición nos dice que para cada elemento de C (x), tiene que existir en C otro elemento distinto de x (z), que tampoco está relacionado con x en A_1 . Esto obliga a que para cada elemento de C se deba elegir una de las dos parejas posibles resultantes de imponer la condición anterior, dejándonos en A_1, sólo una pareja para cada elemento de C de forma que su segunda componente es distinta de la primera.

$(\bar{\forall} x, y \in C)$ **Si** $\langle x, y \rangle \in A_2$ **entonces** $(\langle x, y \rangle \notin A_1$ **y** $x \neq a)$**:** La condición dice que si una pareja está en A_2, no está en A_1 y además que su primer componente es distinta del único elemento distinguido de la estructura.

Dado que tenemos además las restricciones de cardinalidad en las relaciones, de las 6 parejas disponbles, deben haber 3 en A_1. De las restantes, se debe descartar a la que tiene el elemento distinguido como primer componente, dejando las dos restantes en A_2.

De esta forma, una posible estructura contiene como elemento distinguido $\#$ y las relaciones con los siguientes contenidos:

A_1	A_2
$\langle \bullet, \circ \rangle$	$\langle \bullet, \# \rangle$
$\langle \circ, \# \rangle$	$\langle \circ, \bullet \rangle$
$\langle \#, \circ \rangle$	

De esta forma, se obtiene que:

$$\mathcal{M}_1 \equiv \langle C, \{\langle \bullet, \circ \rangle, \langle \circ, \# \rangle, \langle \#, \circ \rangle\}, \{\langle \bullet, \# \rangle, \langle \circ, \bullet \rangle\}, \# \rangle$$

II. $\mathcal{M}_1 \models \forall x \forall y (\neg f_1(x, y) =' c_1 \rightarrow (x =' c_1 \vee y =' c_1))$

$\mathcal{M}_1 \models \forall x \forall y(\neg f_1(x,y) =' c_1 \rightarrow (x =' c_1 \vee y =' c_1))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a, b \in C)(\mathcal{M}_1 \models \neg f_1(\bar{a}, \bar{b}) =' c_1 \rightarrow (\bar{a} =' c_1 \vee \bar{b} =' c_1))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a, b \in C)($**Si** $\mathcal{M}_1 \models \neg f_1(\bar{a}, \bar{b}) =' c_1$ **entonces** $\mathcal{M}_1 \models (\bar{a} =' c_1 \vee \bar{b} =' c_1))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 x2)
$(\bar{\forall} a, b \in C)($**Si** $\mathcal{M}_1 \not\models f_1(\bar{a}, \bar{b}) =' c_1$ **entonces** $(\mathcal{M}_1 \models \bar{a} =' c_1$ **o** $\mathcal{M}_1 \models \bar{b} =' c_1))$
$\Leftrightarrow$ (Def. $\models$ y Def. Valuación)
$(\bar{\forall} a, b \in C)($**Si** $f_1(\bar{a}, \bar{b})^{\mathcal{M}_1} \neq c_1^{\mathcal{M}_1}$ **entonces** $(\bar{a}^{\mathcal{M}_1} = c_1^{\mathcal{M}_1}$ **o** $\bar{b}^{\mathcal{M}_1} =' c_1^{\mathcal{M}_1}))$
$\Leftrightarrow$ (Interpretación de términos)
$(\bar{\forall} a, b \in C)($**Si** $(F(a,b) \neq \#)$ **entonces** $(a = \#$ **o** $b = \#))$

Lo cual es falso dado que podemos tomar $a = \bullet$ y $b = \circ$ que cumplen con ser los dos distintos de $\#$ y que $F(\bullet, \circ) = \bullet$ según la definición de F.

III. $\mathcal{M}_1 \models \forall x \forall y(P_2(x,y) \rightarrow \neg f_1(x,y) =' c_1)$

$\mathcal{M}_1 \models \forall x \forall y(P_2(x,y) \rightarrow \neg f_1(x,y) =' c_1)$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a, b \in C)(\mathcal{M}_1 \models (P_2(\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow \neg f_1(\bar{a}, \bar{b}) =' c_1)))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 x2)
$(\bar{\forall} a, b \in C)($**Si** $\mathcal{M}_1 \models P_2(\bar{a}, \bar{b})$ **entonces** $\mathcal{M}_1 \not\models f_1(\bar{a}, \bar{b}) =' c_1)$
$\Leftrightarrow$ (Def. $\models$ y Def. Valuación)
$(\bar{\forall} a, b \in C)($**Si** $(\bar{a}^{\mathcal{M}_1}, \bar{b}^{\mathcal{M}_1}) \in P_2^{\mathcal{M}_1}$ **entonces** $f_1(\bar{a}, \bar{b})^{\mathcal{M}_1} \neq c_1^{\mathcal{M}_1})$
$\Leftrightarrow$ (Interpretación de términos)
$(\bar{\forall} a, b \in C)($**Si** $(a,b) \in A_2$ **entonces** $F(a,b) \neq \#)$
Considerando todas los elementos de $A_2((\bullet, \#)$ y $(\circ, \bullet))$, podemos ver que:
$F(\bullet, \#) = \bullet \neq \#$
$F(\circ, \bullet) = \circ \neq \#$
concluyendo que la afirmación es verdadera.

Ejercicio 3 (25 puntos)

a. Construir una derivación para:

$$(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \vdash (\forall y)(\forall x)\varphi(y,x)$$

b. Construir una derivación para:

$$(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x)), (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \leftrightarrow Q(y,x)) \vdash (\forall x)(\forall y)(Q(x,y) \rightarrow \neg Q(y,x))$$

Bosquejo de solución

a.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y)}{(\forall y)\varphi(z,y)}\,E\forall^{*6}}{\varphi(z,x)}\,E\forall^{*5}}{(\forall x)\varphi(z,x)}\,I\forall^{*4}}{(\forall z)(\forall x)\varphi(z,x)}\,I\forall^{*3}}{(\forall x)\varphi(y,x)}\,E\forall^{*2}}{(\forall y)(\forall x)\varphi(y,x)}\,I\forall^{*1}$$

***1** $y \notin FV((\forall x)(\forall y)\varphi(x,y))$.

***2** y libre para z en $(\forall x)\varphi(z,x)$.

***3** $z \notin FV((\forall x)(\forall y)\varphi(x,y))$.

***4** $x \notin FV((\forall x)(\forall y)\varphi(x,y))$.

***5** x libre para y en $\varphi(z,y)$.

***6** z libre para x en $(\forall y)\varphi(x,y)$.

b.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \to \neg R(y,x))}{(\forall y)(R(x,y) \to \neg R(y,x))}\,E\forall^{*8}}{R(x,y) \to \neg R(y,x)}\,E\forall^{*7} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \leftrightarrow Q(y,x))}{(\forall y)(R(x,y) \leftrightarrow Q(y,x))}\,E\forall^{*10}}{R(x,y) \leftrightarrow Q(y,x)}\,E\forall^{*9} \quad [Q(y,x)]^2}{R(x,y)}\,E\leftrightarrow_2}{\neg R(y,x)}\,E\to \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \leftrightarrow Q(y,x))}{(\forall y)(R(z,y) \leftrightarrow Q(y,z))}\,E\forall^{*6}}{R(z,x) \leftrightarrow Q(x,z)}\,I\forall^{*5}}{(\forall z)(R(z,x) \leftrightarrow Q(x,z))}\,I\forall^{*4}}{R(y,x) \leftrightarrow Q(x,y)}\,E\forall^{*3} \quad [Q(x,y)]^1}{R(y,x)}\,E\leftrightarrow_2}{\vdash}\,E\neg}{\neg Q(y,x)}\,I\neg_{(2)}}{Q(x,y) \to \neg Q(y,x)}\,I\to_{(1)}}{(\forall y)(Q(x,y) \to \neg Q(y,x))}\,I\forall^{*2}}{(\forall x)(\forall y)(Q(x,y) \to \neg Q(y,x))}\,I\forall^{1}$$

***1** $x \notin FV((\forall x)(\forall y)R(x,y) \leftrightarrow Q(y,x))$ y $x \notin FV((\forall x)(\forall y)R(x,y) \to \neg R(y,x))$.

***2** $y \notin FV((\forall x)(\forall y)R(x,y) \leftrightarrow Q(y,x))$ y $x \notin FV((\forall x)(\forall y)R(x,y) \to \neg R(y,x))$.

***3** y libre para z en $R(z,x) \leftrightarrow Q(x,z)$.

***4** $z \notin FV((\forall x)(\forall y)R(x,y) \leftrightarrow Q(y,x))$.

***5** x libre para y en $R(z,y) \leftrightarrow Q(y,z)$.

***6** z libre para x en $R(x,y) \leftrightarrow Q(y,x)$.

***7** y libre para y en cualquier fórmula.

***8** x libre para x en cualquier fórmula.

***9** y libre para y en cualquier fórmula.

***10** x libre para x en cualquier fórmula.

Ejercicio 4 (25 puntos)

Considere un lenguaje de Primer Orden.

a. Justificar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para cualquier conjunto de sentencias Γ y Γ' no vacíos, consistentes y que no contienen sentencias lógicamente válidas,

I. Si $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$ entonces $CONS(\Gamma) \cap CONS(\Gamma') = CONS(\emptyset)$.

II. Si $CONS(\Gamma) \cap CONS(\Gamma') = CONS(\emptyset)$ entonces $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$.

b. Para cualquier conjunto de sentencias cualesquiera Γ y Δ, justifique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   I. Si $\Gamma \subseteq \Delta$ entonces $CONS(\Gamma) \subseteq CONS(\Delta)$.
   II. Si $CONS(\Gamma) \subseteq CONS(\Delta)$ entonces $\Gamma \subseteq \Delta$.

Bosquejo de solución

a. I. La afirmación es **falsa**.

Consideremos $\Gamma = \{(\forall x)P_1(x)\}$ y $\Gamma' = \{\neg(\exists x)(\neg P_1(x))\}$.
Estos dos conjuntos son no vacíos y además consistentes dado que:

$$\text{Tomando } \mathcal{M} = \langle \mathcal{N}, \mathcal{N} \rangle, \mathcal{M} \models \Gamma \text{ y } \mathcal{M} \models \Gamma'$$

Además, las fórmulas contenidas en los conjuntos no son lógicamente válidas dado que:

$$\text{Tomando } \mathcal{M}' = \langle \mathcal{N}, \{1\} \rangle, \mathcal{M}' \not\models \Gamma \text{ y } \mathcal{M}' \not\models \Gamma'$$

Por otro lado, no tienen fórmulas en común, por lo que se cumple que $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$.
Con esto probamos que Γ y Γ' cumplen todas las hipótesis de la afirmación.

Dado que las fórmulas son equivalentes (por la generalización de De Morgan), tienen los mismos modelos por 2.4.5 en el caso de equivalencia, o sea $Mod(\Gamma) = Mod(\Gamma')$
Dado que $CONS(\Gamma) = Th(Mod(\Gamma))$ entonces $CONS(\Gamma) = CONS(\Gamma')$ y por lo tanto $CONS(\Gamma) \cap CONS(\Gamma') = CONS(\Gamma)$.
Dado que las fórmulas no son lógicamente validas, por el teorema de Completitud, no son teoremas, por lo que $CONS(\Gamma) \neq CONS(\emptyset)$

Por lo tanto existen Γ y Γ', no vacíos, consistentes, sin sentencias lógicamente válidas, sin elementos en común y que no cumplen $CONS(\Gamma) \cap CONS(\Gamma') = CONS(\emptyset)$.

II. La afirmación es **verdadera**.Demostraremos lo pedido.

H) Γ y Γ' son no vacíos y no contienen fórmulas lógicamente válidas y son consistentes.
$CONS(\Gamma) \cap CONS(\Gamma') = CONS(\emptyset)$

T) $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$

Dem.

(Por Absurdo)
Supongamos que $\Gamma \cap \Gamma' \neq \emptyset$.
Esto significa que hay al menos una fórmula α que está en los dos conjuntos.
Como α está en alguno de ellos, entonces no es lógicamente válida y por lo tanto, por el teorema de Completitud, entonces no es un teorema.
Dado que las fórmulas de un conjunto son consecuencias del conjunto, entonces $\alpha \in CONS(\Gamma)$ y $\alpha \in CONS(\Gamma')$ y entonces está en su intersección. Por la segunda hipótesis entonces, hay una fórmula que no es teorema que está en $CONS(\emptyset)$ lo que es absurdo.
Por lo tanto queda demostrada la afirmación.

$\square$

b. I. La afirmación es **verdadera**. Demostraremos la afirmación.

H) $\Gamma \subseteq \Delta$

T) $CONS(\Gamma) \subseteq CONS(\Delta)$

Dem.

Por definición de inclusión, hay que probar que cualquier α en $CONS(\Gamma)$, cumple que también está $CONS(\Delta)$
Consideremos $\alpha \in CONS(\Gamma)$ arbitrario.
Por este motivo, $(\bar{\exists} d) \in Der_P$ tal que $H(d) \in \Gamma$ y $C(d) = \alpha$.
Dado que $\Gamma \subseteq \Delta$ (por hipótesis), entonces $H(d) \subseteq \Delta$, por lo que la misma derivación d verifica que $\Delta \vdash \alpha$.
Por lo tanto, $\alpha \in CONS(\Delta)$
Dado que la única suposición hecha sobre α es que $\alpha \in CONS(\Gamma)$, la conclusión anterior vale para cualquier fórmula que cumpla esa condición por lo que se cumple la tesis.

$\square$

II. La afirmación es **falsa**. Construiremos un contraejemplo.
Consideremos $\Gamma = \{(\forall x)P_1(x)\}$ y $\Delta = \{\neg(\exists x)(\neg P_1(x))\}$, o sea, los mismos conjuntos de la solución de la parte a.I.
En esa solución, se probó que $CONS(\Gamma) = CONS(\Delta)$ por lo que entonces $CONS(\Gamma) \subseteq CONS(\Delta)$. Sin embargo, dado que se ve directamente en la definición por extensión de los conjuntos, $\Gamma \nsubseteq \Delta$, por lo que este caso constituye un contraejemplo de la afirmación pedida.