Examen de Lógica y Lógica modalidad al Revés

5 de Diciembre de 2017

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Considere un alfabeto Σ (no vacío), y el lenguaje Σ_P^+ de las palabras de Σ^* de largo par, no vacías definido como sigue:

I Si $a, b \in \Sigma$ entonces $ab \in \Sigma_P^+$

II si $w \in \Sigma_P^+$ y $a, b \in \Sigma$, entonces $abw \in \Sigma_P^+$

Para cada palabra $w = a_1b_1a_2b_2 \dots a_nb_n \in \Sigma_P^+$ se define la relación $R_w = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots (a_n, b_n)\}$.

a. Usando el ERP adecuado, defina la función $\textsc{está} : \Sigma_P^+ \times \Sigma \times \Sigma \to \{0, 1\}$ de forma que $\textsc{está}(w, x, y) = 1$ sii la pareja (x, y) está en la relación R_w.

b. Recordando que una relación $R \subseteq A \times A$ es asimétrica si cumple

$$\text{si } a \in A, b \in A, \text{ y se cumple } (a, b) \in R \text{ entonces } (b, a) \notin R$$

Usando el ERP adecuado, defina la función $\textsc{asim} : \Sigma_P^+ \to \{0, 1\}$ de forma que $\textsc{asim}(w) = 1$ sii R_w es asimétrica.

Ejemplos:

$\Sigma = \{\#, @, \&\}$

$\textsc{asim}(\#\#) = 0$	$\textsc{asim}(\#@) = 1$
$\textsc{asim}(\#@@\#) = 0$	$\textsc{asim}(\#@@\&\&\#) = 1$
$\textsc{asim}(@\&\#\#) = 0$	$\textsc{asim}(\#@\#@\#@) = 1$

c. Usando el ERP adecuado, defina la función $\textsc{DarR} : \Sigma_P^+ \to Pot(\Sigma \times \Sigma)$ de forma que $\textsc{DarR}(w) = R_w$. [1]

d. Pruebe que:

$$(\bar{\forall} w \in \Sigma_P^+)(\frac{\textsc{largo}(w)}{2} \geq |\textsc{DarR}(w)|)$$

donde $\textsc{largo}$ es la función usual sobre Σ^*.

[1] $Pot(C)$ denota al conjunto potencia de C.

Bosquejo de solución

a. Se define la función $\textsc{está}$ siguiendo el ERP para Σ_P^+.

$$\begin{aligned}\textsc{está}(ab, x, y) &= a = x \text{ y } b = y\\ \textsc{está}(abw, x, y) &= \text{si } a = x \text{ y } b = y \text{ entonces } 1 \text{ sino } \textsc{está}(w, x, y)\end{aligned}$$

b. Se define la función $\textsc{asim}$ siguiendo el ERP para Σ_P^+.

$$\begin{aligned}\textsc{asim}(ab) &= \text{si } a \neq b \text{ entonces } 1 \text{ sino } 0\\ \textsc{asim}(abw) &= \text{si } a \neq b \text{ y } \textsc{está}(w, b, a) = 0 \text{ entonces } \textsc{asim}(w) \text{ sino } 0\end{aligned}$$

c. Se define la función $\textsc{DarR}$ siguiendo el ERP para Σ_P^+.

$$\begin{aligned}\textsc{DarR}(ab) &= \{(a, b)\}\\ \textsc{DarR}(abw) &= \{(a, b)\} \cup \textsc{DarR}(w)\end{aligned}$$

d. Quiero probar $(\bar{\forall} w \in \Sigma_P^+)\mathcal{P}(w)$ para la propiedad

$$\mathcal{P}(w) := \frac{\textsc{largo}(w)}{2} \geq |\textsc{DarR}(w)|.$$

La prueba sigue el PIP para Σ_P^+.

Paso Base

T) $\mathcal{P}(ab) = \dfrac{\textsc{largo}(ab)}{2} \geq |\textsc{DarR}(ab)|$

Dem.

$|\textsc{DarR}(ab)|$

$=$ (Definición de $\textsc{DarR}$)

$|\{(a, b)\}|$

$=$ (Definición de $||$)

1

$=$ (Aritmética)

$2/2$

$=$ (Definición de $\textsc{largo}$)

$\dfrac{\textsc{largo}(ab)}{2}$

$\square$

Paso Inductivo

H) $\mathcal{P}(w) = \dfrac{\textsc{largo}(w)}{2} \geq |\textsc{DarR}(w)|$

T) $\mathcal{P}(abw) = \dfrac{\textsc{largo}(abw)}{2} \geq |\textsc{DarR}(abw)|$

Dem.

$$\frac{\textsc{largo}(abw)}{2}$$
$=$ (Definición de $\textsc{largo}$ (2 veces))
$$\frac{2 + \textsc{largo}(w)}{2}$$
$=$ (Aritmética)
$$1 + \frac{\textsc{largo}(w)}{2}$$
$\geq$ (Hipótesis inductiva)
$$1 + |\text{D}\textsc{ar}\text{R}(w)|$$
$\geq$ (Definición de $||$)
$$|\{(a,b)\} \cup \text{D}\textsc{ar}\text{R}(w)|$$
$=$ (Definición de $\text{D}\textsc{ar}\text{R}$)
$$|\text{D}\textsc{ar}\text{R}(abw)|$$
$\square$

Ejercicio 2 (25 puntos)

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para cualquier $\varphi,\ \psi \in PROP$ y $\Gamma \subseteq PROP$, justificando en cada caso.

a. $\not\models \varphi \Rightarrow \models \neg\varphi$
b. $\models \varphi \Rightarrow \not\models \neg\varphi$
c. $\Gamma \models \varphi \Rightarrow (\bar{\forall}\Delta \subseteq \Gamma)\Delta \models \varphi$
d. $\models \varphi$ y $\varphi \models \psi \Rightarrow \models \psi$

Bosquejo de solución

a. $\not\models \varphi \Rightarrow \models \neg\varphi$
FALSO
Sea $\varphi = p_0$, hay que ver $\not\models \varphi$ y $\not\models \neg\varphi$.

$\not\models \varphi$
$\Leftrightarrow$ (def. $\not\models$)
$(\bar{\exists}v : valuacion)v(\varphi) = 0$
Sea v tal que $v(p_0) = 0$ y $v(p_i) = 1$ $(\bar{\forall}i > 0)$

$\not\models \neg\varphi$
$\Leftrightarrow$ (def. $\not\models$)
$(\bar{\exists}v : valuacion)v(\neg\varphi) = 0$
Sea v tal que $v(p_i) = 1$ $(\bar{\forall}i \in \mathbb{N})$

b. $\models \varphi \Rightarrow \not\models \neg\varphi$
VERDADERO
Supongo $\models \varphi$ y voy a probar $\not\models \neg\varphi$

$$\begin{array}{l}
\models \varphi \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \models) \\
(\bar{\forall} v : valuacion) v(\varphi) = 1 \\
\Leftrightarrow \text{(def. valuación)} \\
(\bar{\forall} v : valuacion) v(\neg\varphi) = 0 \\
\Rightarrow \\
(\bar{\exists} v : valuacion) v(\neg\varphi) = 0 \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \not\models) \\
\not\models \neg\varphi
\end{array}$$

c. $\Gamma \models \varphi \Rightarrow (\bar{\forall} \Delta \subseteq \Gamma) \Delta \models \varphi$
FALSO
Sea $\Gamma = \{p_0\}$ y $\varphi = p_0$.
Hay que probar $\{p_0\} \models p_0$ y $(\bar{\exists} \Delta \subseteq \{p_0\}) \Delta \not\models p_0$

$$\begin{array}{l}
\{p_0\} \models p_0 \\
\Leftrightarrow \text{(def. } \models) \\
(\bar{\forall} v : valuacion) v(p_0) = 1 \Rightarrow v(p_0) = 1
\end{array}$$

Se cumple porque ambos lados de la implicación son iguales

$$\begin{array}{l}
(\bar{\exists} \Delta \subseteq \{p_0\}) \Delta \not\models p_0 \\
\text{Sea } \Delta = \{\} \text{ y } v : valuacion \text{ tal que } v(p_i) = 0 (\bar{\forall} i) \\
\Rightarrow \text{(def. } \not\models) \\
\not\models p_0
\end{array}$$

d. $\models \varphi$ y $\varphi \models \psi \Rightarrow \models \psi$
VERDADERO
Supongo $\models \varphi$ y $\varphi \models \psi$ y voy a probar $\models \psi$

$$\models \psi \quad \Leftrightarrow \text{(def. } \models) \quad (\bar{\forall} v : valuacion) v(\psi) = 1$$

Sea v una valuación arbitraria, hay que probar $v(\psi) = 1$

$$\begin{array}{l}
\models \varphi (\text{ por hip.}) \\
\Rightarrow \text{(def. } \models) \\
v(\varphi) = 1 \\
\Rightarrow \text{(por hip. } \varphi \models \psi) \\
v(\psi) = 1
\end{array}$$

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $\vdash (\forall x) \neg P(x, x) \rightarrow \neg(\exists x)(\exists y)(P(x, y) \wedge x =' y)$
b. $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)) \ \vdash \ (\forall x)(\forall y)(P(x, y) \wedge P(y, x) \rightarrow x =' y)$

En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas.

Bosquejo de solución

a. $\vdash (\forall x)\neg P(x,x) \to \neg(\exists x)(\exists y)(P(x,y) \wedge x{=}'y)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\exists x)(\exists y)(P(x,y)\wedge x{=}'y)]^3 \quad \dfrac{[(\exists y)(P(x,y)\wedge x{=}'y)]^2 \quad \dfrac{\dfrac{[(\forall x)\neg P(x,x)]^4}{\neg P(y,y)}\,E_\forall(*3) \quad \dfrac{\dfrac{[P(x,y)\wedge x{=}'y]^1}{x{=}'y}\,E_\wedge \quad \dfrac{[P(x,y)\wedge x{=}'y]^1}{P(x,y)}\,E_\wedge}{P(y,y)}\,R_{I4}(*1)}{\bot}\,E_\neg}{\bot}\,E_\exists(*2)(1)}{\bot}\,E_\exists(*4)(2)}{\neg(\exists x)(\exists y)(P(x,y)\wedge x{=}'y)}\,I_\neg(3)}{(\forall x)\neg P(x,x)\to\neg(\exists x)(\exists y)(P(x,y)\wedge x{=}'y)}\,I_\to(4)
$$

(∗1) x, y son libres para z en $P(z,y)$.

(∗2) $y \notin FV(\{\ \bot, (\forall x)\neg P(x,x)\})$.

(∗3) y libre para x en $\neg P(x,x)$

(∗4) $x \notin FV(\{\ \bot, (\forall x)\neg P(x,x)\})$.

b. $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to \neg P(y,x)) \ \vdash\ (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \wedge P(y,x) \to x{=}'y)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\to\neg P(y,x))}{(\forall y)(P(x,y)\to\neg P(y,x))}\,E_\forall(*1)}{P(x,y)\to\neg P(y,x)}\,E_\forall(*2) \quad \dfrac{[P(x,y)\wedge P(y,x)]^1}{P(x,y)}\,E_\wedge}{\neg P(y,x)}\,E_\to \quad \dfrac{[P(x,y)\wedge P(y,x)]^1}{P(y,x)}\,E_\wedge}{\bot}\,E_\neg}{x{=}'y}\,E_\bot}{P(x,y)\wedge P(y,x)\to x{=}'y}\,I_\to(1)}{(\forall y)(P(x,y)\wedge P(y,x)\to x{=}'y)}\,I_\forall(*3)}{(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\wedge P(y,x)\to x{=}'y)}\,I_\forall(*4)
$$

(∗1) x libre para x en cualquier fórmula.

(∗2) y libre para y en cualquier fórmula.

(∗3) $y \notin FV((\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to \neg P(y,x)))$

(∗4) $x \notin FV((\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to \neg P(y,x)))$.

Ejercicio 4 (25 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 2; -; 0\rangle$, con símbolo P para el predicado, y las siguientes fórmulas.

$$
\alpha := (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to \neg P(y,x))
$$
$$
\beta := (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \wedge P(y,x) \to x{=}'y)
$$

Indique si las siguientes frases son verdaderas. Justifique su respuesta.:

a. $Mod(\alpha) \subseteq Mod(\beta)$.
b. $Mod(\beta) \subseteq Mod(\alpha)$.
c. $Mod(\alpha) \cap Mod(\beta) = \emptyset$.
d. $Mod(\{\alpha, (\forall x)P(x,x)\}) = \emptyset$
e. $\textsc{Cons}(\beta)$ es una teoría consistente.

Bosquejo de solución

a. **Verdadera.** En el ejercicio 3 hemos probado que $\alpha \vdash \beta$, y por corrección tenemos que $\alpha \models \beta$. Sea una estructura $\mathcal{M}$ arbitraria tal que $\mathcal{M} \models \alpha$. Luego, como $\alpha \models \beta$, tenemos que $\mathcal{M} \models \beta$. Por lo tanto, $Mod(\alpha) \subseteq Mod(\beta)$.

b. **Falsa.**

Debemos proporcionar una estructura $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \beta$ pero $\mathcal{M} \not\models \alpha$.

Sea $\mathcal{M} = \langle \{\bullet\}, \{(\bullet, \bullet)\} \rangle$

$\mathcal{M} \models \beta$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in \{\bullet\})\mathcal{M} \models (\forall y)(P(\bar{a}, y) \wedge P(y, \bar{a}) \to \bar{a} =' y)$
$\Leftrightarrow$ (def. conj.)
$\mathcal{M} \models (\forall y)(P(\bar{\bullet}, y) \wedge P(y, \bar{\bullet}) \to \bar{\bullet} =' y)$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} b \in \{\bullet\})\mathcal{M} \models P(\bar{\bullet}, \bar{b}) \wedge P(\bar{b}, \bar{\bullet}) \to \bar{\bullet} =' \bar{b}$
$\Leftrightarrow$ (def. conj.)
$\mathcal{M} \models P(\bar{\bullet}, \bar{\bullet}) \wedge P(\bar{\bullet}, \bar{\bullet}) \to \bar{\bullet} =' \bar{\bullet}$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$\mathcal{M} \models P(\bar{\bullet}, \bar{\bullet}) \wedge P(\bar{\bullet}, \bar{\bullet}) \Rightarrow \mathcal{M} \models \bar{\bullet} =' \bar{\bullet}$
esto se cumple, al ser el consecuente verdadero.

$\mathcal{M} \not\models \alpha$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\exists} a \in \{\bullet\})\mathcal{M} \not\models (\forall y)(P(\bar{a}, y) \to \neg P(y, \bar{a}))$
$\Leftrightarrow$ (def. conj.)
$\mathcal{M} \not\models (\forall y)(P(\bar{\bullet}, y) \to \neg P(y, \bar{\bullet}))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\exists} b \in \{\bullet\})\mathcal{M} \not\models P(\bar{\bullet}, \bar{b}) \to \neg P(\bar{b}, \bar{\bullet})$
$\Leftrightarrow$ (def. conj.)
$\mathcal{M} \not\models P(\bar{\bullet}, \bar{\bullet}) \to \neg P(\bar{\bullet}, \bar{\bullet})$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$\mathcal{M} \models P(\bar{\bullet}, \bar{\bullet})$ y $\mathcal{M} \not\models \neg P(\bar{\bullet}, \bar{\bullet})$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$\mathcal{M} \models P(\bar{\bullet}, \bar{\bullet})$ y $\mathcal{M} \models P(\bar{\bullet}, \bar{\bullet})$
lo cual se cumple trivialmente

c. **Falsa.** Por la parte a sabemos que $Mod(\alpha) \subseteq Mod(\beta)$. Por lo tanto, $Mod(\alpha) \cap Mod(\beta) = Mod(\alpha)$. Alcanza entonces con probar que α tiene modelo.

Sea $\mathcal{M} = \langle \{\bullet\}, \emptyset \rangle$

$\mathcal{M} \models \alpha$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in \{\bullet\})\mathcal{M} \models (\forall y)(P(\bar{a}, y) \to \neg P(y, \bar{a}))$
$\Leftrightarrow$ (def. conj.)
$\mathcal{M} \models (\forall y)(P(\bar{\bullet}, y) \to \neg P(y, \bar{\bullet}))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} b \in \{\bullet\})\mathcal{M} \models P(\bar{\bullet}, \bar{b}) \to \neg P(\bar{b}, \bar{\bullet})$
$\Leftrightarrow$ (def. conj.)
$\mathcal{M} \models P(\bar{\bullet}, \bar{\bullet}) \to \neg P(\bar{\bullet}, \bar{\bullet})$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$\mathcal{M} \models P(\bar{\bullet}, \bar{\bullet}) \Rightarrow \mathcal{M} \models \neg P(\bar{\bullet}, \bar{\bullet})$
lo cual se cumple, ya que el antecedente es falso.

d. **Verdadera.** El conjunto es inconsistente, por lo que no tiene modelo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to \neg P(y,x))}{(\forall y)(P(x,y) \to \neg P(y,x))}\,E\forall(*1)}{P(x,x) \to \neg P(x,x)}\,E\forall(*2) \qquad \dfrac{(\forall x)P(x,x)}{P(x,x)}\,E\forall(*1)}{\neg P(x,x)}\,E\to \qquad \dfrac{(\forall x)P(x,x)}{P(x,x)}\,E\forall(*1)}{\bot}\,E\neg$$

($*1$**)** x libre para x en cualquier fórmula.

($*2$**)** x libre para y en $P(x,y) \to \neg P(y,x)$.

e. **Verdadera.**

CONS(β) es teoría por ser un CONS.

También es consistente, ya que la estructura de la parte b modela β y por lo tanto modela CONS(β).