Examen de Lógica

26 de Julio de 2016

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **100** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Considere el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ y los lenguajes $L_1, L_2, L_3 \subset \Sigma^*$ definidos como:

- $L_1 = \{w \in \Sigma^* / \ cant_b(w) = 0\}$
- I $\varepsilon \in L_2$
  II Si $w \in L_2$ entonces $aw \in L_2$
  III Si $w \in L_2$ entonces $acw \in L_2$
- I $\varepsilon \in L_3$
  II Si $w \in L_3$ entonces $aw \in L_3$
  III Si $w \in L_3$ entonces $bcw \in L_3$

a. Defina siguiendo el esquema de recursión primitiva las funciones: $cant_b \colon \Sigma^* \to \mathbb{N}$ y $cant_c \colon \Sigma^* \to \mathbb{N}$
(ej: $cant_b(babc) = 2$ y $cant_c(babc) = 1$)

b. Demuestre que $L_2 \subseteq L_1$.

c. Demuestre $L_1 \nsubseteq L_3$

d. Sea $\mathcal{M} = \langle C, R \rangle$ donde

$C = \Sigma^* - (L_1 \cup L_3)$ y

$R = \{w \in C : cant_b(w) = cant_c(w)\}$

Demuestre que: $\mathcal{M} \not\models \neg P_1(x)$

Bosquejo de solución

a.

$$
\begin{aligned}
cant_b(\varepsilon) &:= 0\\
cant_b(xw) &:= \text{si } x = b \text{ entonces } 1 + cant_b(w) \text{ sino } cant_b(w)\\
cant_c(\varepsilon) &:= 0\\
cant_c(xw) &:= \text{si } x = c \text{ entonces } 1 + cant_b(w) \text{ sino } cant_c(w)
\end{aligned}
$$

b. Para justificar que $L_2 \subseteq L_1$ probaremos que

$$(\bar{\forall} w \in L_2) w \in L_1.$$

Se probará por inducción en L_2 la siguiente propiedad $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P}(w) := w \in L_1$$

Caso base: $\mathcal{P}(\varepsilon) := \varepsilon \in \boldsymbol{L}_1$

La cantidad de b de ε es 0 y por lo tanto $\varepsilon \in L_1$. $\square$

Caso inductivo 1: si $\mathcal{P}(w)$ entonces $\mathcal{P}(aw)$.

Hipótesis: $w \in L_1$
Tesis: $aw \in L_1$.

Calculamos $cant_b(aw)$:

$$cant_b(aw) =_{(\text{def.})} cant_b(w) =_{(\text{hipótesis})} 0$$

La cantidad de b de la tira aw es 0 y por lo tanto $aw \in L_1$ $\square$

Caso inductivo 2: si $\mathcal{P}(w)$ entonces $\mathcal{P}(acw)$.

Hipótesis: $w \in L_1$
Tesis: $acw \in L_1$.

Calculamos la cantidad de b de la tira acw:

$$cant_b(acw) =_{(\text{def.})} cant_b(cw) =_{(\text{def.})} cant_b(w) =_{(\text{hip.})} 0$$

La cantidad de b de la tira acw es 0 y por lo tanto $acw \in L_1$. $\square$

Hemos probado las hipótesis del PIP para L_2. Por lo tanto, $(\bar{\forall} w \in L_2) w \in L_1$, o lo que es lo mismo $L_2 \subseteq L_1$.

c. Para justificar que $L_1 \not\subseteq L_3$ probaremos que $c \in L_1$ y que $c \notin L_3$.

Lo primero es inmediato ya que la cantidad de b de la tira c es 0.

Para probar que $c \notin L_3$ se hace un análisis de los distintos casos de formación posibles para L_3

a) Si la última regla usada fuera la regla I, entonces debería cumplirse $\varepsilon = c$; pero estas dos palabras son diferentes.

b) Si la última regla usada fuera la regla II, entonces debería cumplirse $aw = c$; pero estas dos palabras son diferentes porque $a \neq c$.

c) Si la última regla usada fuera la regla III, entonces debería cumplirse $bcw = c$; pero estas dos palabras son diferentes porque $b \neq c$.

d. Recordamos que Σ^* se forma con las siguientes reglas:

a) $\varepsilon \in \Sigma^*$

b) si $w \in \Sigma^*$ y $x \in \Sigma$, entonces $xw \in \Sigma^*$

Ahora mostraré que $bac \in C$.

$bac \in \Sigma^*$ La siguiente secuencia de formación justifica este juicio.

a) $\varepsilon \in \Sigma^*$, aplicando la primera regla.

b) $c \in \Sigma^*$, aplicando la segunda regla a la palabra recién obtenida y a la letra $c \in \Sigma$.

c) $ac \in \Sigma^*$, aplicando la segunda regla a la palabra recién obtenida y a la letra $a \in \Sigma$.

d) $bac \in \Sigma^*$, aplicando la segunda regla a la palabra recién obtenida y a la letra $b \in \Sigma$.

$bac \notin \boldsymbol{L}_1$

$$cant_b(bac) =_{(\text{def.})} 1 + cant_b(ac) > 0$$

$bac \notin \boldsymbol{L}_3$ Un análisis de los distintos casos de formación posibles para L_3 basta.

a) Si la última regla usada fuera la regla I, entonces debería cumplirse $\varepsilon = bac$; pero estas dos palabras son diferentes.

b) Si la última regla usada fuera la regla II, entonces debería cumplirse $aw = bac$; pero estas dos palabras son diferentes porque $a \neq b$.

c) Si la última regla usada fuera la regla III, entonces debería cumplirse $bcw = bac$; pero estas dos palabras son diferentes porque $a \neq c$.

Finalmente, la prueba de que $\mathcal{M} \not\models \neg P_1(x)$.

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \not\models \neg P_1(x) \\
\Leftrightarrow \text{(clausura)} \\
\mathcal{M} \not\models (\forall x)\neg P_1(x) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
\mathcal{M} \models \neg(\forall x)\neg P_1(x) \\
\Leftrightarrow \text{(equivalencia)} \\
\mathcal{M} \models (\exists x)P_1(x) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\exists} u \in C)\mathcal{M} \models P_1(\bar{u}) \\
\Leftrightarrow \text{(def. de } \mathcal{M}\text{)} \\
(\bar{\exists} u \in C) cant_b(u) = cant_c(u)
\end{array}$$

El razonamiento anterior nos dice que alcanza con encontrar una tira de C cuya cantidad de b coincida con la cantidad de c. Previamente, probamos que $bac \in C$. Con un par de aplicaciones de las definiciones de la primera parte podemos verificar que $cant_b(bac) = cant_c(bac) = 1$. □

Ejercicio 2 (25 puntos)

Sea $||\Gamma||$ el conjunto de todas las valuaciones v tales que $v(\Gamma) = 1$ y

$X = \{ \ p_i \mid i \ \geq \ 3 \ \}$

a. Hallar n, la cantidad de elementos de $||X||$. Justifique su respuesta.

b. Determine si existe $\varphi \in$ PROP tal que la cantidad de elementos de $||X \cup \{\varphi\}||$ es dos. Justifique su respuesta.

c. Determine la cantidad de elementos $||X \cup \{(p_0 \wedge (p_1 \vee p_2))\}||$. Justifique su respuesta.

d. Demuestre que $X \nvdash \neg p_2 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8$.

Bosquejo de solución

a. Una valuación w queda definida por el valor que toma en las letras proposicionales. Si $w \in \|X\|$, entonces todo i natural debe cumplir que $w(p_{3+i}) = 1$. Por otra parte, los valores que esa valuación tome en las letras p_0, p_1, p_2 es irrelevante a los fines de determinar su pertenencia a $\|X\|$, ya que esas letras no aparecen en el conjunto. Existen ocho formas posibles de asignar valores de verdad a esas letras, y por lo tanto $n = 8$.

b. Sea

$$\varphi := p_1 \wedge p_2.$$

Observemos que $w(p_1 \wedge p_2) = 1$ sii $w(p_1) = 1$ y $w(p_2) = 1$. Por lo tanto, si $w \in \|X \cup \{\varphi\}\|$ todo i natural debe cumplir que $w(p_{1+i}) = 1$. Por otra parte, los valores que esa valuación tome en la letra p_0 es irrelevante a los fines de determinar su pertenencia a $\|X \cup \{\varphi\}\|$, ya que esa letra no aparece en el conjunto. Existen dos formas posibles de asignar valores de verdad a esa letra, y por lo tanto la cantidad de elementos de $\|X \cup \{\varphi\}\|$ es 2.

c. Observemos que $w(p_0 \wedge (p_1 \vee p_2)) = 1$ sii $w(p_0) = 1$ y $w(p_1 \vee p_2) = 1$. Por lo tanto, si $w \in \|X \cup \{p_0 \wedge (p_1 \vee p_2)\}\|$ todo i natural debe cumplir que $w(p_{3+i}) = 1$, y además $w(p_0) = 1$. Por otra parte, los valores que esa valuación tome en las letras p_1, p_2 deben garantizar que $w(p_1 \vee p_2) = 1$. Existen tres formas posibles de asignar valores de verdad a p_1, p_2 con esa condición, y por lo tanto la cantidad de elementos de $\|X \cup \{p_0 \wedge (p_1 \vee p_2)\}\|$ es tres.

d. Sea v la valuación que hace verdadera a todas las letras proposicionales. Entonces:

$$\begin{aligned}
&v(\neg p_2 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8) = _{\text{(def.)}} \\
&\text{máx}(1 - v(p_2), 1 - v(p_5), 1 - v(p_8)) = _{\text{(def.)}} \\
&0
\end{aligned}$$

Además, $v(X) = 1$. Por lo tanto, existe una valuación que hace verdadero a X, pero falso a $\neg p_2 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8$. Entonces $X \not\models \neg p_2 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8$, y por corrección: $X \nvdash \neg p_2 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8$. $\square$

Ejercicio 3 (25 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 1, 2; 1, 2; 1 \rangle$, y las siguientes fórmulas:

- $\varphi := P(f(z)) \rightarrow \neg P(x)$

- $\psi := (\forall x)P(x)$

a. De $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi$. Justifique su respuesta.

b. Demuestre que $\{\varphi, \psi\} \vdash \perp$

c. Demostrar que $\varphi \vdash \neg(\forall x)P(x)$

d. Demostrar que $(\exists z)f(z) =' c, (\forall x)(\forall y)(Q(x, y) \to (\forall z)z =' c) \vdash (\forall x)(\forall y)(Q(x, y) \to (\exists z)g(x, y) =' f(z))$

Nota: En b, c y d NO son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas.

Bosquejo de solución

a. Sea $\mathcal{M}$ una estructura cualquiera en la que $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$ Probaremos que $\mathcal{M} \models \varphi$

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models P(f(z)) \to \neg P(x) \\
\Leftrightarrow \text{ (Clausura)} \\
\mathcal{M} \models \forall x \forall z (P(f(z)) \to \neg P(x)) \\
\Leftrightarrow \text{ (2.4.5)} \\
(\forall \bar{a}\bar{b} \in |\mathcal{M}|) : \mathcal{M} \models (P(f(\bar{a})) \to \neg P(\bar{b})) \\
\Leftrightarrow \text{ (Definición } \models) \\
(\forall \bar{a}\bar{b} \in |\mathcal{M}|) : v^{\mathcal{M}}(P(f(\bar{a})) \to \neg P(\bar{b})) = 1 \\
\Leftrightarrow \text{ (Definición } v^{\mathcal{M}}) \\
(\forall \bar{a}\bar{b} \in |\mathcal{M}|) : \text{máx}\{1 - v^{\mathcal{M}}(P(f(\bar{a}))), v^{\mathcal{M}}(\neg P(\bar{b}))\} = 1
\end{array}$$

La última expresión vale 1 ya que $P^{\mathcal{M}}$ es el conjunto vacío y por lo tanto para todo a se cumple que $f(\bar{a})^{\mathcal{M}} \notin P^{\mathcal{M}}$ y $v^{\mathcal{M}}(P(f(\bar{a}))) = 0$ (por definición de $v^{\mathcal{M}}$).

La estructura pedida puede ser: $\langle \{\bullet\}, \emptyset, \emptyset, f, g, \bullet \rangle$ donde f y g se definen de la única forma posible (para un universo de un solo valor).

b. Escribiremos una derivación $\varphi, \psi \vdash \perp$:

$$\dfrac{\dfrac{(\forall x)P(x)}{P(x)}\,E_{\forall}^{*2} \qquad \dfrac{\dfrac{(\forall x)P(x)}{P(f(z))}\,E_{\forall}^{*1} \qquad P(f(z)) \to \neg P(x)}{\neg P(x)}\,E_{\to}}{\perp}\,E_{\neg}$$

***1** $f(z)$ libre para x en $P(x)$

***2** x libre para x en $P(x)$

c. Tomamos el árbol de la parte anterior y aplicamos $I_{\neg}$ cancelando la hipótesis $(\forall x)P(x)$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(\forall x)P(x)]^{(1)} \quad P(f(z)) \to \neg P(x) \\ \vdots \\ \perp\end{array}}{\neg(\forall x)P(x)}\,I_{\neg}^{(1)}$$

El árbol completo queda así:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall x)P(x)]^{(1)}}{P(x)}\,E_\forall^{*2} \qquad \dfrac{\dfrac{[(\forall x)P(x)]^{(1)}}{P(f(z))}\,E_\forall^{*1} \quad P(f(z))\to\neg P(x)}{\neg P(x)}\,E_\to}{\bot}\,E_\neg}{\neg(\forall x)P(x)}\,I_\neg^{(1)}$$

d.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\exists z)f(z)='\,c \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Q(x,y)]^{(1)} \quad \dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)(Q(x,y)\to(\forall z)z='\,c)}{(\forall y)(Q(x,y)\to(\forall z)z='\,c)}\,E_\forall^{*1}}{Q(x,y)\to(\forall z)z='\,c}\,E_\forall^{*2}}{(\forall z)z='\,c}\,E_\to}{g(x,y)='\,c}\,E_\forall^{*3} \qquad \dfrac{[f(z)='\,c]^{(2)}}{c='\,f(z)}\,RI_2}{g(x,y)='\,f(z)}\,RI_3}{(\exists z)g(x,y)='\,f(z)}\,I_\exists^{*4}}{(\exists z)g(x,y)='\,f(z)}\,E_\exists^{*5\ (2)}}{Q(x,y)\to(\exists z)g(x,y)='\,f(z)}\,I_\to^{(1)}}{(\forall x)(Q(x,y)\to(\exists z)g(x,y)='\,f(z))}\,I_\forall^{*6}}{(\forall y)(\forall x)(Q(x,y)\to(\exists z)g(x,y)='\,f(z))}\,I_\forall^{*7}$$

Las condiciones son:

***1** x libre para x en $(\forall y)(Q(x,y)\to(\forall z)z='\,c)$.

***2** y libre para y en $Q(x,y)\to(\forall z)z='\,c$.

***3** $g(x,y)$ libre para z en $z='\,c$

***4** z libre para z en $g(x,y)='\,f(z)$

***5** z no aparece libre en:

- $(\exists z)g(x,y)='\,f(z)$ (conclusión)
- $Q(x,y)$ (premisa)
- $(\forall x)(\forall y)(Q(x,y)\to(\forall z)z='\,c)$ (premisa)

***6** x no aparece libre en:

- $(\exists z)f(z)='\,c$
- $(\forall x)(\forall y)(Q(x,y)\to(\forall z)z='\,c)$

***7** y no aparece libre en:

- $(\exists z)f(z)='\,c$
- $(\forall x)(\forall y)(Q(x,y)\to(\forall z)z='\,c)$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 2;1;1\rangle$

a. Determine si las siguientes propiedades son correctas, justifique su respuesta.

  I. El conjunto de sentencias $\{\varphi\in\texttt{SENT}\mid\ \vdash\varphi\}$ es una teoría.

  II. El conjunto de sentencias $\{\varphi\in\texttt{SENT}\mid\ \vdash\neg\varphi\}$ es una teoría.

  III. Existe una única teoría T tal que $\mathrm{Mod}(T)=\emptyset$.

b. Sea $\Gamma = Th(Mod(\{(\exists y)\neg P(f(y),y)\}))$, probar que $(\forall x)(\forall y)P(x,y)\notin\Gamma$.

c. Hallar tres sentencias no equivalentes que pertenezcan a Γ.

Bosquejo de solución

a. I. **Correcta.** Sea Γ_1 el conjunto dado. Debemos probar: $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{SENT})(\Gamma_1 \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma_1)$ (definición de teoría).

Si $\Gamma_1 \vdash \varphi$ debe haber una derivación de φ a partir de premisas de Γ_1. Ahora bien, cada una de esas premisas es un teorema debido a la definición de Γ_1, y puedo construir una prueba colocando las derivaciones de esos teoremas de forma que las premisas sean conclusiones de las mismas. De esta forma, construyo una prueba de φ sin premisas, de donde $\vdash \varphi$ y por lo tanto $\varphi \in \Gamma_1$. $\square$

De otra manera: Γ_1 es el conjunto de todos los *teoremas* de $\texttt{SENT}$. Aplicando corrección y completitud Γ_1 es el conjunto de todas las sentencias *lógicamente válidas*.

Si $\Gamma_1 \vdash \varphi$ entonce $\Gamma_1 \models \varphi$ (corrección). De acuerdo con la definición de $\models$, para toda estructura $\mathcal{M}$, si $\mathcal{M} \models \Gamma_1$ entonces $\mathcal{M} \models \varphi$. Todas las fórmulas de Γ_1 son lógicamente válidas, por lo que son modeladas por *cualquier* estructura. Se concluye que φ es modelada por cualquier estructura y que por lo tanto es también lógicamente válida. Por lo tanto $\varphi \in \Gamma_1$. $\square$

II. **Incorrecta.** Sea Γ_2 el conjunto dado. Debemos probar que

$$(\bar{\exists}\varphi \in \texttt{SENT})(\Gamma_2 \vdash \varphi \text{ y } \varphi \notin \Gamma_2)$$

Observamos en primer término que $\bot \in \Gamma_2$ ya que $\neg\bot$ es un teorema (definición de Γ_2). Se concluye que toda fórmula puede derivarse de Γ_2 aplicando eliminación de $\bot$. Por lo tanto, alcanza con encontrar una fórmula que no pertenezca a Γ_2.

Vemos que $\neg\bot \notin \Gamma_2$ ya que $\neg\neg\bot$ no es teorema (definición de Γ_2) En resumen, hemos encontrado una sentencia $\neg\bot$ que se deriva de Γ_2 pero no pertenece a él; lo que prueba que Γ_2 **no** es teoría

III. **Correcta.**. Sabemos que $\texttt{SENT}$ es una teoría y que $Mod(\texttt{SENT}) = \emptyset$, lo que prueba la existencia de una teoría con esas características.

La unicidad surge del siguiente razonamiento:

$$\begin{array}{l} Mod(T) = \emptyset \\ \Rightarrow \text{(construcción de modelo)} \\ T \vdash \bot \\ \Rightarrow (E\bot) \\ (\bar{\forall}\varphi \in \texttt{SENT})T \vdash \varphi \\ \Rightarrow \text{(def. teoría)} \\ (\bar{\forall}\varphi \in \texttt{SENT})\varphi \in T \\ \Rightarrow \\ T = \texttt{SENT}. \end{array}$$

$\square$

b. Sabemos que $Th(Mod(\Gamma)) = \textsc{Cons}(\Gamma)$ (propiedad vista en el curso). Por lo tanto, debemos probar que $(\exists y)\neg P(f(y), y) \not\models (\forall x)(\forall y)P(x, y)$. Para ello, encontraremos una estructura $\mathcal{M}$ que modele $(\exists y)\neg P(f(y), y)$ y no modele $(\forall x)(\forall y)P(x, y)$.

Tomo como estructura $\mathcal{M}$ una con universo unitario $\{\circ\}$, relación binaria $\emptyset$, función unaria F (única elección posible) y otras relaciones, funciones y elementos distinguidos razonables para compartir el tipo de similaridad usado. Luego,

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} \models (\exists y)\neg P(f(y),y) \\ \Leftarrow_{(2.4.5)} \\ \mathcal{M} \models \neg P(f(\bar{\circ}),\bar{\circ}) \\ \Leftarrow_{(2.4.5)} \\ \mathcal{M} \not\models P(f(\bar{\circ}),\bar{\circ}) \\ \Leftarrow_{(def.)} \\ \langle F(\circ),\circ\rangle \notin \emptyset, \end{array}$$

y esto último es obvio.

Finalmente,

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} \not\models (\forall x)(\forall y)P(x,y) \\ \Leftarrow_{(2,4,5)} \\ \mathcal{M} \not\models P(\bar{\circ},\bar{\circ}) \\ \Leftarrow_{(def.)} \\ \langle \circ,\circ\rangle \in \emptyset, \end{array}$$

y esto último es obvio.

c. Sean las fórmulas

$$\begin{array}{l} \alpha{:=}\neg\bot \\ \beta{:=}(\exists y)\neg P(f(y),y) \\ \gamma{:=}(\exists y)(\exists x)\neg P(x,y) \end{array}$$

debo probar que cada una de ellas se deriva de Γ.

- α es lógicamente válida por lo que se deriva de cualquier conjunto.
- La fórmula β pertenece a Γ por lo tanto $\Gamma \vdash \beta$.
- La derivación de $\Gamma \vdash \gamma$ la construimos así:

$$\dfrac{(\exists y)\neg P(f(y),y) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg P(f(y),y)]^2}{(\exists x)\neg P(x,y)}\,I\exists^{***}}{\gamma}\,I\exists^{**}}{\gamma}\,E\exists^{*}_{2}$$

* γ es una fórmula cerrada, y por lo tanto no tiene ninguna ocurrencia libre de variables. Además, la única hipótesis sin cancelar es la correspondiente al existe a eliminar.

** El término y está libre para y en cualquier fórmula.

*** La fórmula $\neg P(f(y),y)$ es abierta, por lo que todo término esta libre para cualquier variable en ella.

Es claro que α es lógicamente válida por lo que no es equivalente a β ni a γ que no lo son.

Considero las estructuras $\mathcal{M}_1 = \langle \{\circ\}, \{(\circ,\circ)\}, f(\circ)=\circ, \circ\rangle$ y $\mathcal{M}_2 = \langle \{\circ,\bullet\}, \{(\circ,\circ),(\bullet,\bullet)\}\, g, \circ\rangle$ donde $g(\circ)=\bullet$ y $g(\bullet)=\circ$

$\mathcal{M}_1 \not\models \beta$ pues $\langle f(\circ),\circ\rangle \in \{(\circ,\circ)\}$

$\mathcal{M}_1 \not\models \gamma$ pues:

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}_1 \not\models (\exists y)(\exists x)\neg P(x,y) \\ \Leftarrow_{(2,4,5)} \\ (\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}_1|)\mathcal{M} \models P(\bar{a},\bar{b}) \\ \Leftarrow_{(def.)} \\ \langle \circ,\circ\rangle \in \{(\circ,\circ)\} \end{array}$$

Finalmente probamos que β y γ no son equivalentes. $\mathcal{M}_2 \models \gamma$ pues $(\circ, \circ) \notin \{(\circ, \bullet), (\bullet, \circ)\}$

Por otra parte, $\mathcal{M}_2 \not\models \beta$ pues $(g(\circ), \circ)) \in \{(\circ, \bullet), (\bullet, \circ)\}$ y $(g(\bullet), \bullet)) \in \{(\circ, \bullet), (\bullet, \circ)\}$