Examen de Lógica

15 de Febrero de 2016

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **100** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Considere el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ y la siguiente definición de Σ^*:

I $\varepsilon \in \Sigma^*$

II Si $x \in \Sigma$ y $w \in \Sigma^*$, entonces $xw \in \Sigma^*$

a. Defina siguiendo el esquema de recursión primitiva la función $invertir\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ (ej: $invertir(abc) := cba$)

b. Demuestre usando inducción en Σ^* que $(\bar{\forall} w \in \Sigma^*)\ invertir(wx) = x\ invertir(w)$

c. Defina de forma inductiva el conjunto $A \subseteq \Sigma^*$ de las tiras palíndromas (se leen igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda) de largo par.

d. Demuestre usando inducción en A que $(\bar{\forall} w \in A)\ invertir(w) = w$

Bosquejo de solución

a. I $invertir(\varepsilon) = \varepsilon$

II $invertir(xw) = invertir(w)x$

b. **T)** $(\bar{\forall} w \in \Sigma^*)\, invertir(wx) = x\ invertir(w)$

Dem.) Por inducción en Σ^*.

Paso Base. T) $invertir(\varepsilon x) = x\ invertir(\varepsilon)$

Dem.) Como ε es la tira vacía:

$$invertir(\varepsilon x) = invertir(x) = invertir(x\varepsilon)$$

Aplicando la definición de $invertir$ dos veces:

$$invertir(x\varepsilon) = invertir(\varepsilon)\ x = x$$

Como ε es la tira vacía:

$$x = x\varepsilon$$

Aplicando la definición de *invertir*

$$x\varepsilon = x \ invertir(\varepsilon)$$

Por transitiva de la igualdad

$$invertir(x\varepsilon) = xinvertir(\varepsilon)$$

■

Paso Inductivo. H) $invertir(wx) = x \ invertir(w)$

T) $invertir(ywx) = x \ invertir(yw)$

Dem.) Aplicando la definición de *invertir*:

$$invertir(ywx) = invertir(wx) \ y$$

Por hipótesis inductiva:

$$invertir(wx) \ y = x \ invertir(w) \ y$$

Aplicando la definición de *invertir*

$$x \ invertir(w) \ y = x \ invertir(yw)$$

Por transitiva de la igualdad:

$$invertir(ywx) = x \ invertir(yw)$$

por lo que queda demostrada la tesis en este caso.

■

Por aplicación del principio de inducción primitiva, podemos afirmar que para cualquier $w \in \Sigma^*$ se cumple la propiedad.

■

c. I $\varepsilon \in A$

II $x \in \Sigma, w \in A \Rightarrow xwx \in A$

d. **T)** $\bar{\forall} w \in A \, invertir(w) = w$

Dem.) Por inducción en A.

Paso Base. T) $invertir(\varepsilon) = \varepsilon$

Dem.) Inmediato por definición de invertir

Paso Inductivo H) $invertir(w) = w$

T) $invertir(xwx) = xwx$

Dem.) Aplicando la definición de *invertir* una vez,

$$invertir(xwx) = invertir(wx) \ x$$

Aplicando la parte b

$$invertir(wx) = x \ invertir(w)$$

Usando la hipótesis inductiva se obtiene,

$$invertir(xwx) = xwx$$

■

Por aplicación del principio de inducción primitiva, podemos afirmar que para cualquier $w \in A$ se cumple la propiedad.

■

Ejercicio 2 (25 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 1; 1; 0\rangle$, y las siguientes fórmulas:

- $\alpha := P(x) \to (\exists y) f(y) =' x$
- $\beta := ((\exists y) f(y) =' x) \to P(x)$

a. Sea una estructura $\mathcal{M}_1 = \langle \mathbb{N}, \{n \mid n \ mod \ 4 = 0\}, Por_2\rangle$, donde Por_2 es la función multiplicar por 2.

   I. Determine si $\mathcal{M}_1 \models \alpha$. Justifique.

   II. Determine si $\mathcal{M}_1 \models \beta$. Justifique

b. Dé $\mathcal{M}_2$ tal que $\mathcal{M}_2 \models \alpha$ y $\mathcal{M}_2 \models \beta$

c. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique

   I. $cl(\alpha) \models cl(\beta)$

   II. $cl(\beta) \models cl(\alpha)$

Bosquejo de solución

a. I. Voy a probar que $\mathcal{M}_1 \models \alpha$.

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M}_1 \models (P(x) \to (\exists y) f(y) =' x) \Leftrightarrow \text{(Clausura)} \\
\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(P(x) \to (\exists y) f(y) =' x) \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(\mathcal{M}_1 \models (P(\bar{a}) \to (\exists y) f(y) =' \bar{a})) \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(\mathcal{M}_1 \models P(\bar{a}) \Rightarrow \mathcal{M}_1 \models (\exists y) f(y) =' \bar{a}) \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(\mathcal{M}_1 \models P(\bar{a}) \Rightarrow (\bar{\exists} b \in \mathbb{N}) \mathcal{M}_1 \models f(\bar{b}) =' \bar{a}) \Leftrightarrow \text{(Def. } \models \text{ y Def. Valuación)} \\
(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(\bar{a}^{\mathcal{M}_1} \in P^{\mathcal{M}_1} \Rightarrow (\bar{\exists} b \in \mathbb{N}) f(\bar{b})^{\mathcal{M}_1} = \bar{a}^{\mathcal{M}_1}) \Leftrightarrow \text{(Def. Valuación para términos)} \\
(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(a \in \{n \mid n \ mod \ 4 = 0\} \Rightarrow (\bar{\exists} b \in \mathbb{N}) \bar{b}^{\mathcal{M}_1} \times 2 = a) \Leftrightarrow \text{(Def. Valuación para términos)} \\
(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(a \in \{n \mid n \ mod \ 4 = 0\} \Rightarrow (\bar{\exists} b \in \mathbb{N}) b \times 2 = a)
\end{array}
$$

Lo que es cierto porque todos los múltiplos de 4 son múltiplos de 2.

II. Voy a probar que $\mathcal{M}_1 \not\models \beta$.

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M}_1 \models ((\exists y) f(y) =' x \to P(x)) \Leftrightarrow \text{(Clausura)} \\
\mathcal{M}_1 \models (\forall x)((\exists y) f(y) =' x \to P(x)) \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(\mathcal{M}_1 \models ((\exists y) f(y) =' \bar{a} \to P(\bar{a}))) \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(\mathcal{M}_1 \models (\exists y) f(y) =' \bar{a} \Rightarrow \mathcal{M}_1 \models P(\bar{a})) \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})((\bar{\exists} b \in \mathbb{N}) \mathcal{M}_1 \models f(\bar{b}) =' \bar{a} \Rightarrow \mathcal{M}_1 \models P(\bar{a})) \Leftrightarrow \text{(Def. } \models \text{ y Def. Valuación)} \\
(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})((\bar{\exists} b \in \mathbb{N}) f(\bar{b})^{\mathcal{M}_1} = \bar{a}^{\mathcal{M}_1} \Rightarrow \bar{a}^{\mathcal{M}_1} \in P^{\mathcal{M}_1}) \Leftrightarrow \text{(Def. Valuación para términos)} \\
(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})((\bar{\exists} b \in \mathbb{N}) \bar{b}^{\mathcal{M}_1} \times 2 = a) \Rightarrow a \in \{n \mid n \ mod \ 4 = 0\} \Leftrightarrow \text{(Def. Valuación para términos)} \\
(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})((\bar{\exists} b \in \mathbb{N}) b \times 2 = a \Rightarrow a \in \{n \mid n \ mod \ 4 = 0\})
\end{array}
$$

Esto no se cumple. Se toma $a = 6$ y $b = 3$, entonces $b \times 2 = a$ pero $a \notin \{n \mid n \ mod \ 4 = 0\}$

b. $\mathcal{M}_2 = \langle \{\bullet, \circ\}, \{\bullet\}, F\rangle$, donde $F(\bullet) = \bullet$ y $F(\circ) = \bullet$

Voy a probar que $\mathcal{M}_2 \models \alpha$.

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M}_2 \models (P(x) \to (\exists y) f(y) =' x) \Leftrightarrow \text{(Desarrollo de la parte anterior)} \\
(\bar{\forall} a \in \{\bullet, \circ\})(a \in \{\bullet\} \Rightarrow (\bar{\exists} b \in \{\bullet, \circ\}) F(b) = a)
\end{array}
$$

Hay que probar $(\bar{\forall} a \in \{\bullet, \circ\})(a \in \{\bullet\} \Rightarrow (\bar{\exists} b \in \{\bullet, \circ\})F(b) = a)$.
Si $a = \circ$ entonces, $a \notin \{\bullet\}$ y por lo tanto se cumple la implicancia.
Si $a = \bullet$ entonces, $a \in \{\bullet\}$ y si $b = \bullet \Rightarrow F(b) = a$ y por lo tanto se cumple la implicancia

Voy a probar que $\mathcal{M}_2 \models \beta$.

$$\mathcal{M}_2 \models ((\exists y)f(y) =' x \to P(x)) \Leftrightarrow \text{(Desarrollo de la parte anterior)}$$
$$(\bar{\forall} a \in \{\bullet, \circ\})((\bar{\exists} b \in \{\bullet, \circ\})F(b) = a \Rightarrow a \in \{\bullet\})$$

Hay que probar $(\bar{\forall} a \in \{\bullet, \circ\})((\bar{\exists} b \in \{\bullet, \circ\})F(b) = a \Rightarrow a \in \{\bullet\})$.
Si $a = \circ$ entonces, $(\bar{\forall} b \in \{\bullet, \circ\})F(b) \neq a$ y por lo tanto se cumple la implicancia.
Si $a = \bullet$, si $b = \bullet \Rightarrow F(b) = a$ y $a \in \{\bullet\}$, y por lo tanto se cumple la implicancia.

c. I. Falso, por parte a

II. Falso, sea:

$$\mathcal{M}_3 = \langle \{\bullet, \circ\}, \{\bullet, \circ\}, F \rangle$$

donde F es la definida en la parte anterior.

Voy a probar que $\mathcal{M}_3 \models cl(\beta)$.

$$\mathcal{M}_3 \models ((\forall x)(\exists y)f(y) =' x \to P(x)) \Leftrightarrow \text{(Desarrollo de la parte anterior)}$$
$$(\bar{\forall} a \in \{\bullet, \circ\})((\bar{\exists} b \in \{\bullet, \circ\})F(b) = a \Rightarrow a \in \{\bullet, \circ\})$$

Hay que probar $(\bar{\forall} a \in \{\bullet, \circ\})((\bar{\exists} b \in \{\bullet, \circ\})F(b) = a \Rightarrow a \in \{\bullet, \circ\})$.
Si $a = \circ$ entonces, $(\bar{\forall} b \in \{\bullet, \circ\})F(b) \neq a$ y por lo tanto se cumple la implicancia.
Si $a = \bullet$, si $b = \bullet \Rightarrow F(b) = a$ y $a \in \{\bullet, \circ\}$, y por lo tanto se cumple la implicancia.

Voy a probar que $\mathcal{M}_3 \not\models cl(\alpha)$.

$$\mathcal{M}_3 \models (\forall x)(P(x) \to (\exists y)f(y) =' x) \Leftrightarrow \text{(Desarrollo de la parte anterior)}$$
$$(\bar{\forall} a \in \{\bullet, \circ\})(a \in \{\bullet, \circ\} \Rightarrow (\bar{\exists} b \in \{\bullet, \circ\})F(b) = a)$$

Esto no se cumple. Se toma $a = \circ$, entonces $a \in \{\bullet, \circ\}$ pero $(\bar{\forall} b \in \{\bullet, \circ\})F(b) = \bullet \neq a$

Ejercicio 3 (25 puntos)

a. Construya una derivación que justifique la siguiente afirmación:

$$\vdash ((\exists x)P(x) \to P(c)) \to ((\exists x)P(x) \leftrightarrow P(c))$$

b. Considere las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = &\quad (\exists z)(\forall x)\ f(x, z) =' x \\ \alpha_2 = &\quad (\forall x)(\forall y)(\forall w)(f(x, y) =' w \to g(w, y) =' x) \end{aligned}$$

Demuestre que:

$$\alpha_1, \alpha_2 \vdash (\exists z)(\forall x)g(x, z) =' x$$

Nota: En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas.

Bosquejo de solución

a.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[((\exists x)P(x)) \to P(c)]^{(1)} \quad [(\exists x)P(x)]^{(2)}}{P(c)}\, E\to \qquad \dfrac{[P(c)]^{(2)}}{(\exists x)P(x)}\, I\exists^{*}}{((\exists x)P(x)) \leftrightarrow P(c)}\, I\leftrightarrow_{(2)}}{(((\exists x)P(x)) \to P(c)) \to (((\exists x)P(x)) \leftrightarrow P(c))}\, I\to_{(1)}$$

***** c libre para x en $P(x)$.

b.

$$\dfrac{(\exists z)(\forall x)f(x,z) =' x \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)(\forall w)(f(x,y) =' w \to g(w,y) =' x)}{(\forall y)(\forall w)(f(x,y) =' w \to g(w,y) =' x)}\, E\forall^{*6}}{(\forall w)(f(x,z) =' w \to g(w,z) =' x))}\, E\forall^{*5}}{f(x,z) =' x \to g(x,z) =' x}\, E\forall^{*4} \qquad \dfrac{[(\forall x)f(x,z) =' x]^{1}}{f(x,z) =' x}\, E\forall^{*7}}{g(x,z) =' x}\, E\to}{(\forall x)g(x,z) =' x}\, I\forall^{*3}}{(\exists z)(\forall x)g(x,z) =' x}\, I\exists^{*2}}{(\exists z)(\forall x)g(x,z) =' x}\, E\exists^{*1}_{(1)}$$

***1** $z \notin FV(\alpha_2, (\exists z)(\forall x)g(x,z) =' x)$

***2** z libre para z en $(\forall x)g(x,z) =' x$

***3** $x \notin FV(\alpha_2, (\forall x)f(x,z) =' x)$

***4** x libre para w en $f(x,z) =' w \to g(w,z) =' x$

***5** z libre para y en $((\forall w)f(x,y) =' w \to g(w,y) =' x)$

***6** x libre para x en $((\forall y)(\forall w)f(x,y) =' w \to g(w,y) =' x)$

***7** x libre para x en $f(x,z) =' x$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Considere el conjunto de reglas habituales R_0 (o cálculo R_0) para construir derivaciones en `PROP`. Escribimos $\Gamma \vdash_0 \varphi$ cuando tenemos una derivación de φ que usa esas reglas y cuyas hipótesis sin cancelar se encuentran en Γ.

Podríamos haber tomado otro conjunto de reglas R_1 (o cálculo R_1) y escribir $\Gamma \vdash_1 \varphi$ cuando la derivación usa reglas de ese conjunto.

Consideremos ahora la definición siguiente de consistencia para un cálculo R_1:

$$R_1 \text{ es consistente } \Leftrightarrow \quad \nvdash_1 \bot$$

y el siguiente teorema de corrección:

$$(\bar{\forall}\Gamma)(\bar{\forall}\varphi)(\Gamma \vdash_1 \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi)$$

a. Muestre que si se cumple el teorema de corrección para R_1, entonces R_1 es consistente.

b. Considere R_2 con todas las reglas de R_0 menos la reducción al absurdo. ¿Es consistente? ¿Vale el teorema de corrección?

   Observe que todo lo que se puede derivar en R_2, también se puede derivar en R_0, porque R_2 está incluido en R_0.

c. Considere R_3 que a todas las reglas de R_0 le agrega la siguiente regla:

$$\Gamma \vdash_3 \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash_3 \varphi \wedge \psi$$

   ¿Este conjunto de reglas es consistente? ¿Vale el teorema de corrección?

Bosquejo de solución

a. Si $\vdash_1 \bot$, entonces aplicando el teorema con $\Gamma = \emptyset$, tenemos $\models \bot$, lo cual es absurdo.

   Por lo tanto, $\nvdash_1 \bot$, y R_1 es consistente.

b. Como R_2 tiene las reglas de R_0 menos una, se cumple que:

$$\Gamma \vdash_2 \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash_0 \varphi \tag{1}$$

   Entonces:

$$\begin{aligned} &\Gamma \vdash_2 \varphi \Rightarrow \text{(1)} \\ &\Gamma \vdash_0 \varphi \Rightarrow \text{(corrección de } R_0\text{)} \\ &\Gamma \models \varphi \end{aligned}$$

   Por lo tanto el teorema vale para R_2 y por la parte a, R_2 es consistente.

c. Llamemos $I\wedge_{rota}$ a la nueva regla de R_3. La siguiente derivación muestra que este conjunto de reglas no es consistente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]^1}{p \to p}\, I \to^1}{(p \to p) \wedge \bot}\, I\wedge_{rota}}{\bot}\, E\wedge$$

   Por lo tanto, (por el contrarrecíproco de la parte a), el teorema no puede valer para este conjunto.