Examen de Lógica

6 de diciembre de 2016

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **100** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Sea el alfabeto $\Sigma = \{\bullet, \#, \circ\}$

Parte 1

Defina siguiendo el ERP la función $cant : \Sigma^* \times \Sigma \to \mathbb{N}$ tal que $cant(w, x)$ devuelve la cantidad de ocurrencias del símbolo x en w. Por ejemplo: $cant(\varepsilon, \bullet) = cant(\varepsilon, \circ) = 0$, $cant(\bullet\# \circ \#\bullet, \bullet) = 2$, $cant(\bullet\# \circ \#\bullet, \circ) = 1$

Parte 2

Considere las siguientes reglas de construcción de elementos:

1. $\bullet\circ \in \mathcal{L}$
2. Si $w \in \mathcal{L}$, entonces $\bullet\#w \in \mathcal{L}$
3. Si $w \in \mathcal{L}$, entonces $\bullet\# \circ \#w \in \mathcal{L}$

Considere los siguientes lenguajes:

- $\mathcal{L}_{1,2}$ definido inductivamente por las reglas 1 y 2.
- $\mathcal{L}_{1,3}$ definido inductivamente por las reglas 1 y 3.
- $\mathcal{L}_{1,2,3}$ definido inductivamente por las reglas 1 y 2 y 3.
- $\mathcal{L}_{2,3}$ definido inductivamente por las reglas 2 y 3.

Observar que $\mathcal{L}_{1,2}, \mathcal{L}_{1,3}, \mathcal{L}_{1,2,3}, \mathcal{L}_{2,3} \subseteq \Sigma^*$ y que se cumple $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L}_{1,2})cant(w, \circ) = 1$.

a. Demuestre que: $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L}_{1,3})(\bar{\exists} n \in \mathbb{N})cant(w, \#) = 2 * n$

b. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta:

  I. El lenguaje $\mathcal{L}_{1,2}$ está incluído en el lenguaje $\mathcal{L}_{1,2,3}$.
  II. El lenguaje $\mathcal{L}_{1,3}$ está incluído en el lenguaje $\mathcal{L}_{2,3}$.
  III. El lenguaje $\mathcal{L}_{1,2,3}$ está incluído en el lenguaje $\mathcal{L}_{1,2}$.
  IV. El lenguaje $\mathcal{L}_{1,2,3}$ está incluído en el lenguaje $\mathcal{L}_{1,2} \cup \mathcal{L}_{1,3}$.

c. En caso de ser posible, defina las siguientes funciones siguiendo el ERP, demostrando que se cumple la propiedad pedida o justificando por qué no se puede definir:

  I. $f : \mathcal{L}_{1,2} \to \mathcal{L}_{1,3}$ tal que $cant(w, \#) = cant(f(w), \#)$.
  II. $g : \mathcal{L}_{1,2} \to \mathcal{L}_{1,2,3}$ tal que $cant(w, \#) = cant(g(w), \#)$.
  III. $k : \mathcal{L}_{1,3} \to \mathcal{L}_{1,2}$ tal que $cant(w, \#) = cant(k(w), \#)$

Bosquejo de solución

Sea el alfabeto $\Sigma = \{\bullet, \#, \circ\}$

Parte 1

Defina siguiendo el ERP la función $cant : \Sigma^* \times \Sigma \to \mathbb{N}$ tal que $cant(w, x)$ devuelve la cantidad de ocurrencias del símbolo x en w. Por ejemplo: $cant(\varepsilon, \bullet) = cant(\varepsilon, \circ) = 0$, $cant(\bullet\# \circ \#\bullet, \bullet) = 2$, $cant(\bullet\# \circ \#\bullet, \circ) = 1$

$$
\begin{aligned}
&cant : \Sigma^* \times \Sigma \to \mathbb{N}\\
&cant(\varepsilon, a) \quad = 0\\
&cant(bw, a) = \text{ si } a = b \text{ entonces } 1 + cant(w, a) \text{ sino } cant(w, a)
\end{aligned}
$$

Parte 2

Considere las siguientes reglas de construcción de elementos:

1. $\bullet\circ \in \mathcal{L}$
2. Si $w \in \mathcal{L}$, entonces $\bullet\#w \in \mathcal{L}$
3. Si $w \in \mathcal{L}$, entonces $\bullet\# \circ \#w \in \mathcal{L}$

Considere los siguientes lenguajes:

- $\mathcal{L}_{1,2}$ definido inductivamente por las reglas 1 y 2.
- $\mathcal{L}_{1,3}$ definido inductivamente por las reglas 1 y 3.
- $\mathcal{L}_{1,2,3}$ definido inductivamente por las reglas 1 y 2 y 3.
- $\mathcal{L}_{2,3}$ definido inductivamente por las reglas 2 y 3.

Observar que $\mathcal{L}_{1,2}, \mathcal{L}_{1,3}, \mathcal{L}_{1,2,3}, \mathcal{L}_{2,3} \subseteq \Sigma^*$ y que se cumple $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L}_{1,2}) cant(w, \circ) = 1$.

a. Demuestre que: $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L}_{1,3})(\bar{\exists} n \in \mathbb{N}) cant(w, \#) = 2 * n$

Se demuestra usndo el PIP para $\mathcal{L}_{1,3}$.

$P(w) = (\bar{\exists} n \in \mathbb{N}) cant(w, \#) = 2 * n$

Paso Base

T) $(\bar{\exists} n \in \mathbb{N}) cant(\bullet\circ, \#) = 2 * n$

Dem

$cant(\bullet\circ, \#) =_{(\text{def. cant})} cant(\circ, \#) =_{(\text{def. cant})} cant(\varepsilon, \#) =_{(\text{def. cant})} 0 = 2 * 0$

Paso Inductivo

H) $(\bar{\exists} n \in \mathbb{N}) cant(w, \#) = 2 * n$

T) $(\bar{\exists} n \in \mathbb{N}) cant(\bullet\# \circ \#w, \#) = 2 * n$

Dem

Sea n_1 tal que $cant(w, \#) = 2 * n_1$ (n_1 existe por hipótesis inductiva).

$cant(\bullet\# \circ \#w, \#) =_{(\text{def. cant})} cant(\# \circ \#w, \#) =_{(\text{def. cant})}$
$1 + cant(\circ\#w, \#) =_{(\text{def. cant})}$
$1 + cant(\#w, \#) =_{(\text{def. cant})} 1 + 1 + cant(w, \#) =_{(\text{hipótesis inductiva})}$
$2 + 2 * n_1 = 2 * (n_1 + 1)$

Por lo demostrado en el paso base, paso inductivo y el PIP para $\mathcal{L}_{1,3}$ se puede afirmar que: $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L}_{1,3})(\bar{\exists} n \in \mathbb{N}) cant(w, \#) = 2 * n$

b. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta:

I. El lenguaje $\mathcal{L}_{1,2}$ está incluído en el lenguaje $\mathcal{L}_{1,2,3}$. ***VERDADERA***
Las reglas que definen $\mathcal{L}_{1,2}$ están incluídas en las reglas que definen $\mathcal{L}_{1,2,3}$. Por lo tanto todos los elementos que se pueden construir aplicando las reglas de $\mathcal{L}_{1,2}$ también se pueden construir en $\mathcal{L}_{1,2,3}$ (misma secuencia de formación).

II. El lenguaje $\mathcal{L}_{1,3}$ está incluído en el lenguaje $\mathcal{L}_{2,3}$. ***FALSA***
$\bullet\circ \in \mathcal{L}_{1,3}$ (por aplicación de la regla 1) $\Rightarrow \mathcal{L}_{1,3} \neq \emptyset$
En las reglas que definen $\mathcal{L}_{2,3}$ no hay regla base $\Rightarrow \mathcal{L}_{2,3} = \emptyset$
por lo tanto $\mathcal{L}_{1,2} \not\subseteq \mathcal{L}_{2,3}$.

III. El lenguaje $\mathcal{L}_{1,2,3}$ está incluído en el lenguaje $\mathcal{L}_{1,2}$. ***FALSA***
$\bullet\# \circ \# \bullet \# \bullet \circ \in \mathcal{L}_{1,2,3}$ (por aplicación de las reglas 1,2,3)
$cant(\bullet\# \circ \# \bullet \# \bullet \circ, \circ) =_{(\text{def. cant})} 2 \neq 1$.
Por lo tanto $\bullet\# \circ \# \bullet \# \bullet \circ \notin \mathcal{L}_{1,2}$ ya que no cumple la propiedad dada para todos los elementos de $\mathcal{L}_{1,2}$.

IV. El lenguaje $\mathcal{L}_{1,2,3}$ está incluído en el lenguaje $\mathcal{L}_{1,2} \cup \mathcal{L}_{1,3}$. ***FALSA***
Por lo visto en la parte bIII: $\bullet\# \circ \# \bullet \# \bullet \circ \notin \mathcal{L}_{1,2}$
$cant(\bullet\# \circ \# \bullet \# \bullet \circ, \#) =_{(\text{def. cant})} 3$ por lo tanto $\bullet\# \circ \# \bullet \# \bullet \circ \notin \mathcal{L}_{1,3}$ ya que no cumple la propiedad demostrada en la parte a.
Entonces $\bullet\# \circ \# \bullet \# \bullet \circ \notin \mathcal{L}_{1,2} \cup \mathcal{L}_{1,3}$ pero $\bullet\# \circ \# \bullet \# \bullet \circ \in \mathcal{L}_{1,2,3}$ (parte bIII) entonces $\mathcal{L}_{1,2,3} \not\subseteq \mathcal{L}_{1,2} \cup \mathcal{L}_{1,3}$

c. En caso de ser posible, defina las siguientes funciones siguiendo el ERP, demostrando que se cumple la propiedad pedida o justificando por qué no se puede definir:

I. $f : \mathcal{L}_{1,2} \rightarrow \mathcal{L}_{1,3}$ tal que $cant(w, \#) = cant(f(w), \#)$. ***No es posible***.
$\bullet\# \bullet \circ \in \mathcal{L}_{1,2}$, $cant(\bullet\# \bullet \circ, \#) = 1$ no es par y no hay un elemento de $\mathcal{L}_{1,3}$ con la misma cantidad de $\#$ (ver propiedad demostrada en a).

II. $g : \mathcal{L}_{1,2} \rightarrow \mathcal{L}_{1,2,3}$ tal que $cant(w, \#) = cant(g(w), \#)$. ***Si es posible***.
$g = id$
Por lo demostrado en la parte bI, $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L}_{1,2}) w \in \mathcal{L}_{1,2,3}$
La función identidad mantiene la cantidad de símbolos.

III. $k : \mathcal{L}_{1,3} \rightarrow \mathcal{L}_{1,2}$ tal que $cant(w, \#) = cant(k(w), \#)$ ***Si es posible***

$$\begin{array}{ll} k : \mathcal{L}_{1,3} \to \mathcal{L}_{1,2} & \\ k(\bullet\circ) & = \bullet\circ \\ k(\bullet\# \circ \# w) & = \bullet\# \bullet \# k(w) \end{array}$$

Se debe probar que:

- $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L}_{1,3}) k(w) \in \mathcal{L}_{1,2}$
- $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L}_{1,3}) cant(w, \#) = cant(k(w), \#)$

Estas demostraciones se realizan usando el PIP para $\mathcal{L}_{1,3}$

$(\bar{\forall} w \in \mathcal{L}_{1,3}) k(w) \in \mathcal{L}_{1,2}$
$P(w) = k(w) \in \mathcal{L}_{1,2}$

Paso Base

T) $k(\bullet\circ) \in \mathcal{L}_{1,2}$

Dem

$k(\bullet\circ) =_{\text{(def.k)}} \bullet\circ$
$\bullet\circ \in \mathcal{L}_{1,2}$ (por regla 1).

Paso Inductivo

H) $k(w) \in \mathcal{L}_{1,2}$

T) $k(\bullet\# \circ \# w) \in \mathcal{L}_{1,2}$

Dem

$k(\bullet\# \circ \# w) =_{\text{(def.k)}} \bullet\# \bullet \# k(w)$

Por hipótesis inductiva $k(w) \in \mathcal{L}_{1,2}$
$\bullet\# k(w) \in \mathcal{L}_{1,2}$ (aplicación regla 2 al elemento anterior)
$\bullet\# \bullet \# k(w) \in \mathcal{L}_{1,2}$ (aplicación regla 2 al elemento anterior)
Por lo tanto $k(\bullet\# \circ \# w) \in \mathcal{L}_{1,2}$

Por lo demostrado en el paso base, paso inductivo y por aplicación del PIP para $\mathcal{L}_{1,3}$ se cumple $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L}_{1,3}) k(w) \in \mathcal{L}_{1,2}$.

$(\bar{\forall} w \in \mathcal{L}_{1,3}) cant(w, \#) = cant(k(w), \#)$
$P(w) = cant(w, \#) = cant(k(w), \#)$

Paso Base

T) $cant(\bullet\circ, \#) = cant(k(\bullet\circ), \#)$

Dem

$cant(k(\bullet\circ), \#) =_{\text{(def.cant)}} cant(\bullet\circ, \#)$

Paso Inductivo

H) $cant(w, \#) = cant(k(w), \#)$

T) $cant(\bullet\# \circ \# w, \#) = cant(k(\bullet\# \circ \# w), \#)$

Dem

$cant(k(\bullet\# \circ \# w), \#) =_{\text{(def.k)}} cant(\bullet\# \bullet \# k(w), \#) =_{\text{(def.cant)}}$
$2 + cant(k(w), \#) =_{\text{(hipótesis inductiva)}} 2 + cant(w, \#) =_{\text{(def.cant)}}$
$cant(\bullet\# \circ \# w, \#)$

Por lo demostrado en el paso base, paso inductivo y por aplicación del PIP para $\mathcal{L}_{1,3}$ se cumple $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L}_{1,3}) cant(w, \#) = cant(k(w), \#)$.

Ejercicio 2 (25 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 1, 1; 2, 2; 0\rangle$, con dos símbolos de predicado P_1 y P_2 y dos símbolos de función f_1 y f_2.

Sean las fórmulas:

- $\varphi_1 = (\forall x_1)(\forall x_2)(P_1(x_1) \wedge P_1(x_2) \to P_1(f_1(x_1, x_2)))$
- $\varphi_2 = (\forall x_1)(P_2(f_2(x_1, x_2)) \to P_2(f_1(x_1, x_2)))$

Sea la estructura: $\mathcal{M}_1 = \langle \texttt{PROP}, \texttt{PROP} - \texttt{CONT}, \texttt{PROP} - \texttt{TAUT}, F_\wedge, F_\vee\rangle$, donde

- $\texttt{PROP}$ es el conjunto de todas las fórmulas proposicionales.
- $\texttt{TAUT} = \{\alpha \in \texttt{PROP} \mid (\bar{\forall} v : Val)\ v(\alpha) = 1\}$
- $\texttt{CONT} = \{\alpha \in \texttt{PROP} \mid (\bar{\forall} v : Val)\ v(\alpha) = 0\}$
- $F_\wedge(\alpha, \beta) = (\alpha \wedge \beta)$ y $F_\vee(\alpha, \beta) = (\alpha \vee \beta)$ para todo α y β de $\texttt{PROP}$.

a. Determine si $\mathcal{M}_1 \models \varphi_1$. Justifique.

b. Determine si $\mathcal{M}_1 \models \varphi_2$. Justifique.

c. Determine si existe una estructura $\mathcal{M}_2 = \langle \mathbb{B}, A_1, A_2, F, G\rangle$, del tipo de similaridad adecuado, tal que:

- $\mathbb{B} = \{0, 1\}$
- $\emptyset \subset A_1 \subset \mathbb{B}, \emptyset \subset A_2 \subset \mathbb{B}$
- $\mathcal{M}_2 \models \varphi_1$ y $\mathcal{M}_2 \models \varphi_2$.

Justifique su respuesta.

Bosquejo de solución

a.

$$\mathcal{M}_1 \models (\forall x_1)(\forall x_2)(P_1(x_1) \wedge P_1(x_2) \to P_1(f_1(x_1, x_2)))$$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 y sustitución)
$$(\bar{\forall} a \in \texttt{PROP})(\bar{\forall} b \in \texttt{PROP}) \ : \ \mathcal{M}_1 \models P_1(\bar{a}) \wedge P_1(\bar{b}) \to P_1(f_1(\bar{a}, \bar{b})))$$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$$(\bar{\forall} a \in \texttt{PROP})(\bar{\forall} b \in \texttt{PROP}) \ : \ \mathcal{M}_1 \models P_1(\bar{a}) \wedge P_1(\bar{b}) \Rightarrow \mathcal{M}_1 \models P_1(f_1(\bar{a}, \bar{b}))$$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$$(\bar{\forall} a \in \texttt{PROP})(\bar{\forall} b \in \texttt{PROP}) \ : \ \mathcal{M}_1 \models P_1(\bar{a}) \text{ y } \mathcal{M}_1 \models P_1(\bar{b}) \ \Rightarrow \ \mathcal{M}_1 \models P_1(f_1(\bar{a}, \bar{b}))$$
$\Leftrightarrow$ (definición de $\models$)
$$(\bar{\forall} a \in \texttt{PROP})(\bar{\forall} b \in \texttt{PROP}) \ : \ a \in (\texttt{PROP} - \texttt{CONT}) \text{ y } b \in (\texttt{PROP} - \texttt{CONT}) \ \Rightarrow \ (a \wedge b) \in (\texttt{PROP} - \texttt{CONT})$$
$\Leftrightarrow$ (diferencia de conjuntos)
$$(\bar{\forall} a \in \texttt{PROP})(\bar{\forall} b \in \texttt{PROP}) \ : \ a \notin \texttt{CONT} \text{ y } b \notin \texttt{CONT} \ \Rightarrow \ (a \wedge b) \notin \texttt{CONT}$$

Probaremos que la última sentencia **no** se cumple. Las proposiciones p_1 y $\neg p_1$ no son contradicciones. Sin embargo, su conjunctión $(p_1 \wedge \neg p_1)$ sí es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{M}_1 \not\models \varphi_1$.

b.
$$\mathcal{M}_1 \models (\forall x_1)(P_2(f_2(x_1, x_2)) \to P_2(f_1(x_1, x_2)))$$
$\Leftrightarrow$ (def. de $\models$)
$$\mathcal{M}_1 \models (\forall x_2)(\forall x_1)(P_2(f_2(x_1, x_2)) \to P_2(f_1(x_1, x_2)))$$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 y sustitución)
$$(\bar{\forall} b \in \texttt{PROP})(\bar{\forall} a \in \texttt{PROP}) \ : \ \mathcal{M}_1 \models P_2(f_2(\bar{a}, \bar{b})) \to P_2(f_1(\bar{a}, \bar{b}))$$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$$(\bar{\forall} a \in \texttt{PROP})(\bar{\forall} b \in \texttt{PROP}) \ : \ \mathcal{M}_1 \models P_2(f_2(\bar{a}, \bar{b})) \Rightarrow \mathcal{M}_1 \models P_2(f_1(\bar{a}, \bar{b}))$$
$\Leftrightarrow$ (definición de $\models$)
$$(\bar{\forall} a \in \texttt{PROP})(\bar{\forall} b \in \texttt{PROP}) \ : \ (a \vee b) \in (\texttt{PROP} - \texttt{TAUT}) \ \Rightarrow \ (a \wedge b) \in (\texttt{PROP} - \texttt{TAUT})$$
$\Leftrightarrow$ (diferencia de conjuntos)
$$(\bar{\forall} a \in \texttt{PROP})(\bar{\forall} b \in \texttt{PROP}) \ : \ (a \vee b) \notin \texttt{TAUT} \ \Rightarrow \ (a \wedge b) \notin \texttt{TAUT}$$

Probaremos que la última sentencia se cumple.

Si $(a \vee b)$ no es una tautología, entonces existe una valuación v tal que $v(a \vee b) = 0$. Esto sólo ocurre si $v(a) = 0$ y $v(b) = 0$. Por lo tanto, $v((a \wedge b)) = 0$ lo que prueba que $(a \wedge b)$ no es una tautología.

Hemos probado que $\mathcal{M}_1 \models \varphi_2$

c. Siguiendo el mismo desarrollo que en las partes anteriores, concluimos que:

- $\mathcal{M}_1 \models \varphi_1 \ \Leftrightarrow \ (\bar{\forall} a \in \mathbb{B})(\bar{\forall} b \in \mathbb{B}) \ : \ a \in A_1$ y $b \in A_1 \ \Rightarrow \ F(a, b) \in A_1$
- $\mathcal{M}_1 \models \varphi_2 \ \Leftrightarrow \ (\bar{\forall} a \in \mathbb{B})(\bar{\forall} b \in \mathbb{B}) \ : \ G(a, b) \in A_2 \ \Rightarrow \ F(a, b) \in A_2$

Definimos:

- $A_1 = \{0\}$
- $A_2 = \{1\}$
- $F(a, b) = G(a, b) = a \times b$

Si $a \in A_1$ y $b \in A_1$ entonces $a = b = 0$ y $F(a, b) = a \times b = 0 \in A_1$. Luego $\mathcal{M}_1 \models \varphi_1$.

Como F y G son la misma función se verifica trivialmente que $G(a, b) \in A_2 \ \Rightarrow \ F(a, b) \in A_2$. Por lo tanto: $\mathcal{M}_1 \models \varphi_2$.

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $(\forall x)(\forall y)((f(x) =' y \wedge \neg P(y)) \to \neg P(x)) \vdash (\forall x)(P(x) \to P(f(x)))$

b. $(\forall x)(P(x) \to (\exists y)\neg\, x =' y), (\forall x)(P(x) \to (\forall y)\, f(x) =' y), (\forall x)P(x) \vdash \bot$

En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas.

Bosquejo de solución

a.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{f(x) =' f(x)}\,RI1 \qquad [\neg P(f(x)]^2}{f(x) =' f(x) \wedge \neg P(f(x))}\,I\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)((f(x) =' y \wedge \neg P(y)) \to \neg P(x))}{(\forall y)((f(x) =' y \wedge \neg P(y)) \to \neg P(x))}\,E\forall_{*3}}{(f(x) =' f(x) \wedge \neg P(f(x))) \to \neg P(x)}\,E\forall_{*2}}{\neg P(x)}\,E\to \qquad [P(x)]^1}{\bot}\,E\neg}{P(f(x))}\,RAA_{(2)}}{P(x) \to P(f(x))}\,I\to_{(1)}}{(\forall x)(P(x) \to P(f(x)))}\,I\forall^{*1}
$$

$*^1$ x no ocurre libre en $(\forall x)(\forall y)((f(x) =' y \wedge \neg P(y)) \to \neg P(x))$.

$*^2$ $f(x)$ está libre para y en $(f(x) =' y \wedge \neg P(y)) \to \neg P(x)$.

$*^3$ x está libre para x en $(\forall y)(f(x) =' y \wedge \neg P(y)) \to \neg P(x)$.

b.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)P(x)}{P(f(x))}\,E\forall^{*2} \qquad \dfrac{(\forall x)(P(x) \to (\exists y)\neg x =' y)}{P(f(x)) \to (\exists y)\neg f(x) =' y}\,E\forall^{*3}}{(\exists y)\neg f(x) =' y}\,E\to \qquad \dfrac{[\neg f(x) =' y]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)P(x)}{P(x)}\,E\forall^{*4} \qquad \dfrac{(\forall x)(P(x) \to (\forall y)f(x) =' y)}{P(x) \to (\forall y)f(x) =' y}\,E\forall^{*6}}{(\forall y)f(x) =' y}\,E\to}{f(x) =' y}\,E\forall^{*5}}{\bot}\,E\neg}{\bot}\,E\exists_1^{*1}
$$

$*^1$ y no ocurre libre en $(\forall x)P(x)$, en $(\forall x)(P(x) \to (\forall y)(f(x) =' y)$ ni en $\bot$.

$*^2$ $f(x)$ está libre para x en $P(x)$.

$*^3$ $f(x)$ está libre para x en $P(x) \to (\exists y)\neg x =' y$.

$*^4$ x está libre para x en $P(x)$.

$*^5$ y está libre para y en $f(x) =' y$.

$*^6$ x está libre para x en $P(x) \to (\forall y)f(x) =' y$.

Ejercicio 4 (25 puntos)

Sea un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 1, 1; -; 0\rangle$ con símbolos de predicado P y Q, y $\alpha = \exists x(P(x) \vee Q(x))$.

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique:

a. $CONS(\alpha)$ es consistente.

b. $CONS(\alpha)$ es consistente maximal.

c. Sea $\Delta = CONS(\alpha) - \{\alpha\}$. Existe un conjunto consistente maximal Γ tal que $\Delta \subseteq \Gamma$ y $\alpha \notin \Gamma$.

Bosquejo de solución

a. $CONS(\alpha)$ es consistente.
   Verdadero. Sea la estructura $\mathcal{M} \equiv \langle \mathbb{N}, Par, > 6\rangle$ Considere el 0. Es natural y par, con lo que es un testigo para x en α. De esta forma,se sabe que $\mathcal{M} \models \alpha$,por lo que $\mathcal{M} \models CONS(\alpha)$ (Resultado del práctico).
   Como $CONS(\alpha)$ tiene al menos un modelo, por la condición suficiente de consistencia, tiene que ser consistente.

b. $CONS(\alpha)$ es consistente maximal.
Falso. Considere la fórmula $\beta \equiv \exists x(\neg P(x))$ y la estructura $\mathcal{M}' \equiv \langle \mathbb{N}, \mathbb{N}, > 6\rangle$. Usando el mismo testigo que en la parte a, se puede ver que $\mathcal{M}' \models \alpha$.
Por otro lado, $\mathcal{M}' \not\models \beta$ dado que no hay ningún natural que no sea natural . De esta forma, se prueba que $\beta \notin CONS(\alpha)$ dado que encontramos un modelo de α que no es modelo de β.
Además, dado que existen naturales que no son pares, $\mathcal{M} \models \beta$ y por la parte a se sabe que $\mathcal{M} \models CONS(\alpha)$. Por estos dos motivos, $CONS(\alpha) \cup \{\beta\}$ es consistente, lo que viola la definición de consistencia maximal para $CONS(\alpha)$.

c. Sea $\Delta = CONS(\alpha) - \{\alpha\}$. Existe un conjunto consistente maximal Γ tal que $\Delta \subseteq \Gamma$ y $\alpha \notin \Gamma$.

Falso. Suponemos Γ que cumpla

- Γ es consistente maximal
- $\Delta \subseteq \Gamma$
- $\alpha \notin \Gamma$

Observamos que se cumple:

- $(\neg\neg\alpha)$ `eq` α ya que para toda estructura $\mathcal{M}$ se cumple que $v^{\mathcal{M}}(\neg\neg\alpha) = 1 - v^{\mathcal{M}}(\neg\alpha) = 1 - (1 - v^{\mathcal{M}}(\alpha)) = v^{\mathcal{M}}(\alpha)$
- $\alpha \models \neg\neg\alpha$ ya que todo modelo de α lo es también de $\neg\neg\alpha$. Por lo tanto, por completitud $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$ y entonces: $\neg\neg\alpha \in \mathtt{Cons}(\alpha)$.
- $\neg\neg\alpha \in \Gamma$ puesto que $\neg\neg\alpha$ es distinto de α y pertenece $\mathtt{Cons}(\alpha)$

Como Γ es consistente, existe $\mathcal{M}$ del tipo adecuado tal que: $\mathcal{M} \models \Gamma$. Entonces $\mathcal{M} \models \neg\neg\alpha$ ya que $\neg\neg\alpha \in \Gamma$. Se concluye que $\mathcal{M} \models \alpha$ por ser equivalente a $\neg\neg\alpha$.

Luego, $\mathcal{M} \models \Gamma \cup \{\alpha\}$ lo que prueba que $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es consistente contradiciendo la consistencia maximal de Γ.