Examen de Lógica

28 de Julio de 2015

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **100** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle -; 1, 2; 1\rangle$. Con los símbolos: f, g para las funciones y c para la constante.

Considere la estructura $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, ^2, *, 9\rangle$, donde ^{2} es la función que eleva al cuadrado y $*$ es la función de multiplicación entre enteros.

a. Dé $t_1, t_2 \in \texttt{TERM}$ tales que: $t_1 \neq t_2$ y $t_1^{\mathcal{M}} = t_2^{\mathcal{M}}$

b. Defina inductivamente el conjunto $\texttt{TERM}_C$ para este lenguaje.

c. Defina una función $\mathit{Elimf} : \texttt{TERM}_C \to \texttt{TERM}_C$ tal que $\mathit{Elimf}(t)$ devuelve un término del lenguaje sin la ocurrencia del símbolo f pero manteniendo su interpretación en $\mathcal{M}$ ($t^{\mathcal{M}} = \mathit{Elimf}(t)^{\mathcal{M}}$).

d. Demuestre inductivamente la siguiente propiedad: $(\overline{\forall} t \in \texttt{TERM}_C)\mathcal{M} \models t \doteq \mathit{Elimf}(t)$

Bosquejo de solución

a. Defino

$$t_1 := f(c) \qquad t_2 := g(c, c)$$

Claramente, son términos distintos. Además,

$$\begin{array}{lcl}
f(c)^{\mathcal{M}} & & g(c,c)^{\mathcal{M}} \\
= \text{(interpretación)} & & = \text{(interpretación)} \\
(c^{\mathcal{M}})^2 & & c^{\mathcal{M}} \times c^{\mathcal{M}} \\
= \text{(interpretación)} & y & = \text{(interpretación)} \\
9^2 & & 9 \times 9 \\
= \text{(aritmética)} & & = \text{(aritmética)} \\
81, & & 81.
\end{array}$$

b. $\texttt{TERM}_C$ está definido inductivamente con las siguientes reglas:

a) $c \in \texttt{TERM}_C$

b) si $t \in \texttt{TERM}_C$, entonces $f(t) \in \texttt{TERM}_C$

c) si $t \in \texttt{TERM}_C, t' \in \texttt{TERM}_C$, entonces $g(t,t') \in \texttt{TERM}_C$

c. Se define la función *Elimf* siguiendo el ERP para $\texttt{TERM}_C$.

$$\begin{array}{ll} \mathit{Elimf}(c) & = c \\ \mathit{Elimf}(f(t)) & = g(\mathit{Elimf}(t), \mathit{Elimf}(t)) \\ \mathit{Elimf}(g(t,t')) & = g(\mathit{Elimf}(t), \mathit{Elimf}(t')) \end{array}$$

d. Usaré el PIP para $\texttt{TERM}_C$ para probar la siguiente propiedad:

$$P(t) := \mathcal{M} \models t \doteq \mathit{Elimf}(t)$$

Paso base

T) $P(c) = \mathcal{M} \models c \doteq \boldsymbol{Elimf}(c)$

Demo.

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} \models c \doteq \mathit{Elimf}(c) \\ \Leftarrow \text{ (definición } \mathit{Elimf}\text{)} \\ \mathcal{M} \models c \doteq c \\ \Leftarrow \text{ (interpretación)} \\ c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}}, \end{array}$$

inmediato por reflexividad.

Paso inductivo 1

HI1) $P(t) = \mathcal{M} \models t \doteq \mathit{Elimf}(t)$

TI1) $P(f(t)) = \mathcal{M} \models f(t) \doteq f(\mathit{Elimf}(t))$

Demo.

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} \models f(t) \doteq \mathit{Elimf}(f(t)) \\ \Leftarrow \text{ (definición } \mathit{Elimf}\text{)} \\ \mathcal{M} \models f(t) \doteq g(\mathit{Elimf}(t), \mathit{Elimf}(t)) \\ \Leftarrow \text{ (interpretación)} \\ f(t)^{\mathcal{M}} = g(\mathit{Elimf}(t), \mathit{Elimf}(t))^{\mathcal{M}} \\ \Leftarrow \text{ (interpretación)} \\ (t^{\mathcal{M}})^2 = \mathit{Elimf}(t)^{\mathcal{M}} \times \mathit{Elimf}(t)^{\mathcal{M}} \\ \Leftarrow \text{ (aritmética)} \\ t^{\mathcal{M}} = \mathit{Elimf}(t)^{\mathcal{M}} \\ \Leftarrow \text{ (interpretación)} \\ \mathcal{M} \models t = \mathit{Elimf}(t), \end{array}$$

que es, justamente, la HI1).

Paso inductivo 2

HI2) $P(t) = \mathcal{M} \models t \doteq \mathit{Elimf}(t)$
$P(t') = \mathcal{M} \models t' \doteq \mathit{Elimf}(t')$

TI2) $P(g(t,t')) = \mathcal{M} \models g(t,t') \doteq \mathit{Elimf}(g(t,t'))$

Demo.

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models g(t,t')\dot{=}\mathit{Elimf}(g(t,t')) \\
\Leftarrow \text{(definición } \mathit{Elimf}) \\
\mathcal{M} \models g(t,t')\dot{=}g(\mathit{Elimf}(t), \mathit{Elimf}(t')) \\
\Leftarrow \text{(interpretación)} \\
g(t,t')^{\mathcal{M}} = g(\mathit{Elimf}(t), \mathit{Elimf}(t'))^{\mathcal{M}} \\
\Leftarrow \text{(interpretación)} \\
t^{\mathcal{M}} \times t'^{\mathcal{M}} = \mathit{Elimf}(t)^{\mathcal{M}} \times \mathit{Elimf}(t')^{\mathcal{M}} \\
\Leftarrow \text{(aritmética)} \\
t^{\mathcal{M}} = \mathit{Elimf}(t)^{\mathcal{M}} \text{ y } t'^{\mathcal{M}} = \mathit{Elimf}(t')^{\mathcal{M}} \\
\Leftarrow \text{(interpretación)} \\
\mathcal{M} \models t = \mathit{Elimf}(t) \text{ y } \mathcal{M} \models t' = \mathit{Elimf}(t'),
\end{array}
$$

que son, justamente, las HI2.

Por lo demostrado en el paso base, los pasos inductivos y la aplicación del PIP para $\texttt{TERM}_C$ queda demostrada la propiedad: $(\bar{\forall} t \in \texttt{TERM}_C)\mathcal{M} \models t\dot{=}\mathit{Elimf}(t)$

Ejercicio 2 (25 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 1, 2; -; 0\rangle$ y símbolos P_1 y P_2 para el primer y segundo predicado respectivamente. Considere una estructura $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, Q, S\rangle$

a. Indique alguna condición necesaria y suficiente sobre Q para que la siguiente afirmación sea verdadera Justifique su respuesta.

$$\mathcal{M} \models (\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)(\neg P_1(x))$$

b. Indique alguna condición necesaria y suficiente sobre Q y S para que la siguiente afirmación sea verdadera Justifique la respuesta.

$$\mathcal{M} \models P_1(x) \wedge P_1(y) \leftrightarrow P_2(x,y)$$

c. Determine si es posible encontrar una estructura $\mathcal{M}_1$ que cumpla las siguientes condiciones. Justifique su respuesta.

$$\mathcal{M}_1 \models (\exists x)P_1(x) \text{ y } \mathcal{M}_1 \not\models P_1(x) \wedge P_1(y) \rightarrow (\forall x)(\forall y)P_2(x,y)$$

Bosquejo de solución

a. Considero que Q sea no vacío (esté habitado) y esté estrictamente incluído en $\mathbb{Z}$.

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models (\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)\neg P_1(x) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
\mathcal{M} \models (\exists x)P_1(x) \text{ y } \mathcal{M} \models (\exists x)\neg P_1(x) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\exists} a \in \mathbb{Z})\mathcal{M} \models P_1(\bar{a}) \text{ y } (\bar{\exists} b \in \mathbb{Z})\mathcal{M} \models \neg P_1(\bar{b}) \\
\Leftrightarrow \text{(definición } \models \text{ y 2.4.5)} \\
(\bar{\exists} a \in \mathbb{Z}) a \in Q \text{ y } (\bar{\exists} b \in \mathbb{Z})\mathcal{M} \not\models P_1(\bar{b}) \\
\Leftrightarrow \text{(definición } \models) \\
(\bar{\exists} a \in \mathbb{Z}) a \in Q \text{ y } (\bar{\exists} b \in \mathbb{Z}) b \notin Q,
\end{array}
$$

y esto sucede si y solamente si Q es no vacío y está estrictamente incluído en $\mathbb{Z}$.

b. Considero que $S = Q \times Q$.

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models P_1(x) \wedge P_1(y) \leftrightarrow P_2(x,y) \\
\Leftrightarrow \text{(clausura)} \\
\mathcal{M} \models (\forall x)(\forall y)(P_1(x) \wedge P_1(y) \leftrightarrow P_2(x,y)) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\forall} a, b \in \mathbb{Z})\mathcal{M} \models P_1(\bar{a}) \wedge P_1(\bar{b}) \leftrightarrow P_2(\bar{a},\bar{b}) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\forall} a, b \in \mathbb{Z})(\mathcal{M} \models P_1(\bar{a}) \wedge P_1(\bar{b}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models P_2(\bar{a},\bar{b})) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\forall} a, b \in \mathbb{Z})(\mathcal{M} \models P_1(\bar{a}) \text{ y } \mathcal{M} \models P_1(\bar{b}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models P_2(\bar{a},\bar{b})) \\
\Leftrightarrow \text{(definición } \models) \\
(\bar{\forall} a, b \in \mathbb{Z})(a \in Q \text{ y } b \in Q \Leftrightarrow \langle a,b\rangle \in S),
\end{array}$$

y esto sucede si y solamente si $S = Q \times Q$.

c. Analizo la segunda condición.

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M}_1 \not\models P_1(x) \wedge P_1(y) \to (\forall x)(\forall y)P_2(x,y) \\
\Leftrightarrow \text{(clausura)} \\
\mathcal{M}_1 \not\models (\forall x)(\forall y)(P_1(x) \wedge P_1(y) \to (\forall x)(\forall y)P_2(x,y)) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}_1|)(\mathcal{M}_1 \not\models P_1(\bar{a}) \wedge P_1(\bar{b}) \to (\forall x)\forall y)P_2(x,y)) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}_1|)(\mathcal{M}_1 \models P_1(\bar{a}) \wedge P_1(\bar{b}) \text{ y } \mathcal{M}_1 \not\models (\forall x)(\forall y)P_2(x,y)) \\
\Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\
(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}_1|)(\mathcal{M}_1 \models P_1(\bar{a}) \text{ y } \mathcal{M}_1 \models P_1(\bar{b}) \text{ y } (\bar{\exists} c \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\exists} d \in |\mathcal{M}_1|)(\mathcal{M}_1 \not\models P_2(\bar{c},\bar{d}))) \\
\Leftrightarrow \text{(definición } \models) \\
(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}_1|)(a \in P_1^{\mathcal{M}_1} \text{ y } b \in P_1^{\mathcal{M}_1} \text{ y } (\bar{\exists} c \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\exists} d \in |\mathcal{M}_1|)(\langle c,d\rangle \notin P_2^{\mathcal{M}_1})) \\
\Leftrightarrow \\
P_1^{\mathcal{M}_1} \neq \emptyset \text{ y } P_2^{\mathcal{M}_1} \subset |\mathcal{M}_1| \times |\mathcal{M}_1|.
\end{array}$$

Considero la siguiente estructura: $\mathcal{M}_1 := \langle \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \emptyset \rangle$. Vemos que se cumple la primera parte de la condición hallada, porque la interpretación $P_1^{\mathcal{M}_1}$ es no vacía y también se cumple la segunda parte, porque el vacío está incluído estrictamente en cualquier conjunto no vacío, y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es no vacío.

Finalmente, verifiquemos la condición que nos falta:

$$\begin{array}{l}
\mathcal{M}_1 \models (\exists x)P_1(x) \\
\Leftarrow \text{(2.4.5)} \\
\mathcal{M}_1 \models P_1(\overline{837489179857}) \\
\Leftarrow \text{(definición } \models) \\
837489179857 \in \mathbb{Z},
\end{array}$$

y esto último es cierto.

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construir derivaciones que construyan los siguientes juicios.

a. $\vdash (\forall x)(\forall y)x \doteq y \to ((\exists x)P(x) \to P(c))$

b. $\vdash (\forall y)f(y) \doteq g(y) \wedge (\exists x)f(x) \doteq c \to (\exists x)c \doteq g(x)$

c. Una persona intenta demostrar que se cumple la siguiente propiedad:

$$(\forall x)(\forall y)(\neg x \doteq f(y) \to \neg P(y)) \vdash \; (\forall w)(\neg P(w))$$

Para esto construye la siguiente "derivación":

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)(\neg x \doteq f(y) \to \neg P(y))}{(\forall y)(\neg g(x) \doteq f(y) \to \neg P(y))}\; E\forall(*1)\boldsymbol{a}}{\neg g(x) \doteq y \to \neg P(y)}\; E\forall(*2)\boldsymbol{b} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{g(x) \doteq g(x)}\; RI_1\boldsymbol{c}}{(\exists y)\neg g(x) \doteq y}\; I\exists(*3)\boldsymbol{d}}{\neg g(x) \doteq y}\; E\exists(*4)\boldsymbol{e}}{\neg P(y)}\; E \to \boldsymbol{f}}{(\forall w)(\neg P(w))}\; I\forall(*5)\boldsymbol{g}$$

$(*1) g(x)$ está libre para x en $(\forall y)(\neg x \doteq f(y) \to \neg P(y))$

$(*2) y$ está libre para y en cualquier fórmula.

$(*3) y$ está libre para $g(x)$ en $\neg g(x) \doteq y$.

$(*4) y$ está libre para y en cualquier fórmula.

$(*5) w \notin FV((\forall x)(\forall y)(\neg x \doteq f(y) \to \neg P(y)))$

Indique 4 reglas MAL aplicadas en esta derivación justificando ***TODOS*** los errores cometidos en cada uno de ellas. Use las etiquetas $\boldsymbol{a}..\boldsymbol{g}$ para identificar las reglas.

Bosquejo de solución

a.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\exists x)P(x)]^2 \qquad \dfrac{[P(x)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[(\forall x)(\forall y)x \doteq y]^3}{(\forall y)x \doteq y}\; E\forall(*1)}{x \doteq c}\; E\forall(*2)}{P(c)}\; RI_4'}{P(c)}\; E\exists(*3)(1)}{(\exists x)P(x) \to P(c)}\; I \to (2)}{(\forall x)(\forall y)x \doteq y \to ((\exists x)P(x) \to P(c))}\; I \to (3)$$

(*1) x está libre para x en $(\forall y)x \doteq y$

(*2) c está libre para y en $x \doteq y$

(*3) $x \notin FV(\{P(c), (\forall x)(\forall y)x \doteq y\})$

b.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall y)f(y) \doteq g(y) \wedge (\exists x)f(x) \doteq c]^2}{(\exists x)f(x) \doteq c}\; E\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[f(x) \doteq c]^1}{c \doteq f(x)}\; RI_2 \qquad \dfrac{\dfrac{[(\forall y)f(y) \doteq g(y) \wedge (\exists x)f(x) \doteq c]^2}{(\forall y)f(y) \doteq g(y)}\; E\wedge}{f(x) \doteq g(x)}\; E\forall(*1)}{c \doteq g(x)}\; RI_3}{(\exists x)c \doteq g(x)}\; I\exists(*2)}{(\exists x)c \doteq g(x)}\; E\exists(*3)(1)}{(\forall y)f(y) \doteq g(y) \wedge (\exists x)f(x) \doteq c \to (\exists x)c \doteq g(x)}\; I \to (2)$$

(*1) x está libre para y en $f(y) \doteq g(y)$

(*2) x está libre para x en $c \doteq g(x)$

(*3) $x \notin FV(\{(\forall y)f(y) \doteq g(y) \wedge (\exists x)f(x) \doteq c, (\exists x)c \doteq g(x)\})$

c. **regla b** Al aplicar una $E\forall$ la conclusión debe ser el resultado de sustituir la variable del cuantificador por un término libre para esa variable en la fórmula bajo el alcance del cuantificador. En este caso la conclusión debería ser el resultado de sustituir la variable y por un término libre para y en $\neg g(x) \doteq f(y) \to \neg P(y)$ y esto no sucede ya que en la conclusión no se realiza una sustitución sino que se elimina la ocurrencia de la función f.

regla d Al aplicar la regla $I\exists$ la hipótesis debe ser el resultado de aplicar una sustitución de la variable del $\exists$ en la fórmula bajo del alcance del cuantificador en la fórmula de la conclusión de la regla. En este caso además de la sustitución se modifica la fórmula, se agrega una negación. La restricción en la sustitución debería ser que el término $g(x)$ está libre para la variable y.

regla e La estructura de la regla no es correcta, debería tener 2 hipótesis y en la conclusión no debe aparecer libre la variable del $\exists$. (En este caso no debe figurar y como variable libre en $\neg g(x) \doteq y$ cosa que si sucede.

Las dos hipótesis que debería tener la regla son: - una derivación con conclusión el existe que se esta eliminando.

- una derivación con posible hipótesis la fórmula del alcance del $\exists$ y con conclusión igual a la conclusión de la $E\exists$

regla g Al aplicar $I\forall$ no es posible modificar las variables de la fórmula de la hipótesis en la conclusión. La restricción es correcta para la introducción de un $\forall w$ en este punto de la derivación ya que considera las hipótesis sin cancelar.

Ejercicio 4 (25 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle -; -; 0\rangle$ y las siguientes fórmulas:

$$\alpha \equiv (\forall x)(\forall y)x \doteq y$$

$$\beta \equiv (\exists x)(\exists y)\neg x \doteq y$$

a. Pruebe que $\mathcal{M} \in Mod(\alpha)$ si y sólo si el dominio de $\mathcal{M}$ tiene un solo elemento.

b. Pruebe que $\mathcal{M} \in Mod(\beta)$ si y sólo si el dominio de $\mathcal{M}$ tiene más de un elemento.

c. Pruebe que: $\text{Cons}(\alpha) \cap \text{Cons}(\beta) = \text{Cons}(\emptyset)$.

d. Considere ahora un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad$\langle 1; -; 0\rangle$, con símbolo P para el predicado. Pruebe que $\text{Cons}(\alpha)$ no es consistente maximal.

Bosquejo de solución

a. **T)** $\mathcal{M} \in MOD(\alpha)$ si y sólo si su dominio tiene un elemento.

Dem.

Dada la definición de $MOD(\alpha)$, esto es lo mismo que probar que:

$$\langle U \rangle \models \alpha \Leftrightarrow |U| = 1$$

La demostración la estructuramos en dos teoremas (directo y recíproco).

H) $\langle U \rangle \models \alpha$

T) $|U| = 1$

Dem.

Por 2.4.5, de $\langle U \rangle \models \alpha$ llegamos a:

$$(\bar{\forall} a \in U)(\bar{\forall} b \in U) a = b$$

Lo que va a ser cierto sólo si U tiene un único elemento.

$\square$

H) $|U| = 1$

T) $\langle U \rangle \models \alpha$

Dem.

Por absurdo.
Supongamos que $\langle U \rangle \not\models \alpha$.
Esto significa que (Ver teorema anterior):

$$(\bar{\forall} a \in U)(\bar{\forall} b \in U) a = b$$

no es cierto. Esto significa que se pueden encontrar $a \in U$ y $b \in U$ tales que $a \neq b$. Esto hace que U tenga más de un elemento, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, se cumple la tesis.

$\square$

$\square$

b. **T)** $\mathcal{M} \in Mod(\beta)$ si y sólo si el dominio de $\mathcal{M}$ tiene más de un elemento

Dem.

Siguiendo la misma estrategia que antes, se demuestran los dos teoremas.

H) $\langle U \rangle \models \beta$

T) $|U| > 1$

Dem.

Por 2.4.5, de $\langle U \rangle \models \beta$ llegamos a:

$$(\bar{\exists} a \in U)(\bar{\exists} b \in U) a \neq b$$

Trabajamos por absurdo.
Supongamos que $|U| = 1$.
En este caso no hay dos elementos distintos, por lo que no es cierta esta condición, lo que contradice la hipótesis.
Por lo que se cumple la tesis.

$\square$

H) $|U| > 1$

T) $\langle U \rangle \models \beta$

Dem.

Nuevamente, por absurdo.
Supongamos que $\langle U \rangle \not\models \beta$
Esto hace que la afirmación:

$$(\exists a \in U)(\exists b \in U) a \neq b$$

no sea cierta. Pero esto hace que U tenga un sólo elemento, lo que contradice la hipótesis.
Por esto, se cumple la tesis.

□

□

c. **T)** $\textsc{Cons}(\alpha) \cap \textsc{Cons}(\beta) = \textsc{Cons}(\emptyset)$

Dem.

La primer observación a tener en cuenta, es que si se consideran todos los modelos del tipo de similaridad dado, o bien tienen un elemento en el universo o bien tienen más de un elemento en el universo.

Si se toma una $\varphi \in Cons(\alpha)$ cualquiera, cumple que todos los modelos de α son modelos de φ. Por lo que φ es verdadera en todos los modelos que tienen un universo con cardinalidad 1.

Si se toma una $\psi \in Cons(\beta)$ cualquiera, cumple que todos los modelos de β son modelos de ψ. Por lo que ψ es verdadera en todos los modelos que tienen un universo con cardinalidad mayor que 1.

Si una fórmula está en los dos conjuntos, entonces es verdadera en todos los modelos que tienen un universo con cardinalidad 1 y en todos los modelos que tienen un universo con cardinalidad mayor que 1, por lo que es verdadera en todos los modelos. Esa fórmula entonces, está en $Cons(\emptyset)$ que es el conjunto de todos los teoremas, o sea, de las fórmulas lógicamente válidas.

□

d. **H)** El lenguaje tiene tipo de similaridad $\langle 1; -; 0 \rangle$ y símbolo de predicado P, $\alpha \equiv (\forall x)(\forall y) x \doteq y$

T) $\textsc{Cons}(\alpha)$ no es consistente maximal.

Dem.

Consideremos la fórmula $(\forall x)P(x)$. Esta fórmula tiene las siguientes características:

Está escrita en el lenguaje con el tipo indicado.

Si se consideran las estructuras con universo con cardinalidad 1 (las estructuras que modelan a los elementos de $\textsc{Cons}(\alpha)$), sólo es modelada por aquellas estructuras que tengan como interpretación del predicado P una relación no vacía.
Es por esto que:

$(\forall x)P(x) \notin \textsc{Cons}(\alpha)$. Hay modelos de $\textsc{Cons}(\alpha)$ que no son modelos de $(\forall x)P(x)$. Por ejemplo $\mathcal{M} =< \{1\}, \emptyset >$, tiene exactamente 1 elemento, por parte (a) sabemos que $\mathcal{M} \models \alpha$ y por definición de $\models$ y de CONS, $\mathcal{M} \models CONS(\alpha)$. Y esta estructura tiene interpretación del predicado P vacía, por lo que no modela a la fórmula elegida

($\mathcal{M} \models (\forall x)P(x)$ sii (def $\models$, interpretación de fórmulas y términos) $\bar{\forall} a \in \{1\} : a \in \emptyset$, y esto no lo cumple ningún elemento).

$\text{Cons}(\alpha) \cup \{(\forall x)P(x)\}$ tiene modelo, es consistente. Por ejemplo $\mathcal{M} =< \{1\}, \{1\} >$ es modelo de esa unión, ya que tiene exactamente un elemento y la interpretación de P no es vacía.

Por lo tanto, si a $\text{Cons}(\alpha)$ le agregamos la fórmula $(\forall x)P(x)$ el conjunto es consistente, o sea $\text{Cons}(\alpha)$ no es consistente maximal.

$\square$