Examen de Lógica

11 de Febrero de 2015

Indicaciones generales

- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **100** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

a. Defina inductivamente el lenguaje proposicional $\mathcal{L}_{\neg,\mathcal{T}}$ formado por las letras proposicionales y que tiene como conectivas únicamente a la conectiva habitual $\neg$ y una nueva conectiva ternaria $\mathcal{T}$.

b. Defina la valuación para la conectiva $\mathcal{T}$ en términos de **máximos** y **mínimos** de forma que su interpretación se corresponda con el IF-THEN-ELSE.

c. Demuestre inductivamente que el conjunto $\{\neg, \mathcal{T}\}$ es un conjunto adecuado (completo) de conectivas.

d. Sea el conjunto $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_{\neg,\mathcal{T}}$ cuya única conectiva es $\mathcal{T}$.

   I. Sea v_1 la valuación que asigna 1 a todas las letras proposicionales. Demuestre que $(\bar{\forall}\alpha \in \mathcal{L})(v_1(\alpha) = 1)$

   II. Demuestre que el conjunto $\{\mathcal{T}\}$ NO es un conjunto adecuado (completo) de conectivas.

Bosquejo de solución

a. I $p_i \in \mathcal{L}_{\neg,\mathcal{T}}$

   II Si $\alpha \in \mathcal{L}_{\neg,\mathcal{T}}$ entonces $(\neg\alpha) \in \mathcal{L}_{\neg,\mathcal{T}}$

   III Si $\alpha \in \mathcal{L}_{\neg,\mathcal{T}}$, $\beta \in \mathcal{L}_{\neg,\mathcal{T}}$, $\gamma \in \mathcal{L}_{\neg,\mathcal{T}}$ entonces $\mathcal{T}(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathcal{L}_{\neg,\mathcal{T}}$

b.

$$v(\mathcal{T}(\alpha,\beta,\gamma)) := \text{máx}\,\{\text{mín}\,\{v(\alpha), v(\beta)\}\,, \text{mín}\,\{1 - v(\alpha), v(\gamma)\}\}$$

c. Sabiendo que el subconjunto de `PROP` que tiene como únicos conectivos $\{\neg, \wedge\}$ ($\mathtt{PROP}'$) es un conjunto adecuado de conectivas alcanza con probar que $(\bar{\forall}\alpha \in \mathtt{PROP}')(\exists\beta \in \mathcal{L}_{\neg,\mathcal{T}})(\alpha \ \mathtt{eq}\ \beta)$

   La demostración se realiza aplicando el PIP para $\mathtt{PROP}'$

   Recordamos la definición inductiva de $\mathtt{PROP}'$:

I $p_i \in \mathtt{PROP}'$

II Si $\alpha \in \mathtt{PROP}'$ entonces $(\neg\alpha) \in \mathtt{PROP}'$

III Si $\alpha \in \mathtt{PROP}'$ y $\beta \in \mathtt{PROP}'$ entonces $(\alpha \wedge \beta) \in \mathtt{PROP}'$

Propiedad para el PIP: $P(\alpha) := (\exists\beta \in \mathcal{L}_{\neg,\mathcal{T}})(\alpha \ \mathtt{eq}\ \beta)$

Paso Base $T)$ $(\exists\beta \in \mathcal{L}_{\neg,\mathcal{T}})(p_i \ \mathtt{eq}\ \beta)$

Demo. Sea $\beta = p_i$. Luego, $p_i \in \mathcal{L}_{\neg,\mathcal{T}}$ por la regla 1) de su definición y $p_i \ \mathtt{eq}\ p_i$

Paso Inductivo 1 $H_I1)$ $(\exists\beta_1 \in \mathcal{L}')(\alpha_1 \ \mathtt{eq}\ \beta_1)$

$T_I1)$ $(\exists\beta \in \mathcal{L}')((\neg\alpha_1) \ \mathtt{eq}\ \beta)$

Demo. Sea v una valuación cualquiera. Defino $\beta = (\neg\beta_1)$, que está en $\mathcal{L}_{\neg,\mathcal{T}}$ por la regla 2) de su definición. Luego,

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \ \mathtt{eq}\ \beta_1 \text{(por } (H_I1)) \\ \Rightarrow \text{(teo. de sustitución)} \\ (\neg\alpha_1) \ \mathtt{eq}\ (\neg\beta_1) \end{array}$$

Por lo tanto, tenemos que $(\neg\alpha_1) \ \mathtt{eq}\ \beta$.

Paso Inductivo 2 $H_I2)$ $(\exists\beta_1 \in \mathcal{L}')(\alpha_1 \ \mathtt{eq}\ \beta_1)$ y $(\exists\beta_2 \in \mathcal{L}')(\alpha_2 \ \mathtt{eq}\ \beta_2)$

$T_I2)$ $(\exists\beta \in \mathcal{L}')((\alpha_1 \wedge \alpha_2) \ \mathtt{eq}\ \beta)$

Demo. Sea v una valuación cualquiera. Defino $\beta = T(\beta_1, \beta_2, \beta_1)$, que está en $\mathcal{L}_{\neg,\mathcal{T}}$ por la regla 3) de su definición. Luego,

$$\begin{array}{l} v(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \\ = \text{(def. de valuación para la conjunción)} \\ \text{mín}\{v(\alpha_1), v(\alpha_2)\} \\ = (H_I2) \\ \text{mín}\{v(\beta_1), v(\beta_2)\} \\ = \text{(aritmética, como } (\bar\forall x \in \{0,1\})\, \text{mín}\{1-x, x\} = 0) \\ \text{máx}\{\text{mín}\{v(\beta_1), v(\beta_2)\}, \text{mín}\{1 - v(\beta_1), v(\beta_1)\}\} \\ = \text{(def. de valuación para } T) \\ v(T(\beta_1, \beta_2, \beta_1)). \end{array}$$

Por lo tanto, tenemos que $(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \ \mathtt{eq}\ \beta$.

d.

I. Se define $v_1(p_i) = 1$.

Para demostrar $(\bar\forall\alpha \in \mathcal{L})(v_1(\alpha) = 1)$ se hace usando el PIP para $\mathcal{L}$.

Propiedad: $P(\alpha) := v_1(\alpha) = 1$

Paso Base

T) $v(p_i) = 1$

Dem.

Sea cumple por definición de v_1.

Paso Inductivo

$H_I)$
$v_1(\alpha) = 1$
$v_1(\beta) = 1$
$v_1(\gamma) = 1$
$T_I2)$
$v_1(\mathcal{T}(\alpha, \beta, \gamma) = 1$
Demo.

Por $H_I)$ $v_1(\alpha) = 1$
Por definición de valuación $v_1(\mathcal{T}(\alpha, \beta, \gamma) = v_1(\beta)$
Por $H_I)$ $v_1(\beta) = 1$
Por lo tanto: $v_1(\mathcal{T}(\alpha, \beta, \gamma) = 1$

II. Por definición de valuación: $v_1(\perp) = 0$ y por lo demostrado en la parte anterior la valuación v_1 de todas las fórmulas de $\mathcal{L}$ es 1. Por lo tanto no existe una fórmula de $\mathcal{L}$ que sea equivalente a $\perp$. Entonces se puede afirmar que el conjunto de conectivas de $\mathcal{L}$ no es adecuado.

Ejercicio 2 (25 puntos)

Construir derivaciones que construyan los siguientes juicios.

a.
$$(\forall x)P(f(x)) \vdash (\forall x)(\exists y)(P(y) \wedge y{=}'f(x))$$

b.
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x{=}'y \vee x{=}'z) \vdash (\exists x)f(f(x)){=}'x$$

En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas.

Bosquejo de solución

a.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(P(f(x)))}{P(f(x))}\,E\forall^{***} \qquad \dfrac{}{f(x) = f(x)}\,RI1}{P(f(x)) \wedge f(x) = f(x)}\,I\wedge}{(\exists y)(P(y) \wedge y = f(x))}\,I\exists^{**}}{(\forall x)(\exists y)(P(y) \wedge y = f(x))}\,I\forall^{*}$$

* La variable x no está libre en $(\forall x)(P(f(x)))$.

** El término $f(x)$ está libre para la variable y en $P(y) \wedge y = f(x)$.

*** El término x está libre para x en $P(f(x))$.

b.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x='y \vee x='z)}{(\forall y)(\forall z)(x='y \vee x='z)}\,E\forall^{****}}{(\forall z)(x='f(f(x)) \vee x='z)}\,E\forall^{***}}{x='f(f(x)) \vee x='f(f(x))}\,E\forall^{**} \qquad [x='f(f(x))]^1 \quad [x='f(f(x))]^1}{x='f(f(x))}\,E\vee^1}{f(f(x))='x}\,RI_2}{(\exists x)f(f(x))='x}\,I\exists^*$$

*, **** El término x está libre para la variable x en cualquier fórmula.

** El término $f(f(x))$ está libre para la variable z en $x='f(f(x)) \vee x='z$, porque x, la única variable que ocurre en el término, no aparece cuantificada en la fórmula.

*** El término $f(f(x))$ está libre para la variable y en $(\forall z)(x='y \vee x='z)$, porque x, la única variable que ocurre en el término, no aparece cuantificada en la fórmula.

Ejercicio 3 (25 puntos)

a. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 2, 2; 1; 1 \rangle$.

Sean las siguientes fórmulas de $\mathcal{L}$:

$$\varphi := (\exists x)\neg(\exists z)f(x)='z$$

$$\psi := \neg(\exists z)f(x) = z \to (\forall x)f(x)='x$$

I. Demostrar que no existe una estructura $\mathcal{M}_1$ tal que $\mathcal{M}_1 \models \varphi$. Justificar la respuesta.

II. En caso de ser posible de una estructura $\mathcal{M}_2$ tal que $\mathcal{M}_2 \models \psi$. Justificar la respuesta.

b. Dada la estructua $\mathcal{M}_3 = \langle \texttt{PROP}, R, EQ \rangle$ donde:

$$R = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \texttt{PROP}, \alpha \models \beta\}$$
$$EQ = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \texttt{PROP}, \alpha \ \texttt{eq}\ \beta\}$$

De una SENTENCIA σ tal que $\mathcal{M}_3 \models \sigma$ y $\not\models \sigma$. Justificar la respuesta

Bosquejo de solución

a. I. Sea $\mathcal{M}$ una estructura del tipo adecuado y $a \in |\mathcal{M}|$. Luego,

$$\mathcal{M} \models f(\bar{a})='f(\bar{a})$$
$$\Rightarrow_{(2.4.5)}$$
$$\mathcal{M} \models (\exists z)f(\bar{a})='z$$
$$\Rightarrow_{(2.4.5)}$$
$$\mathcal{M} \not\models \neg(\exists z)f(\bar{a})='z.$$

Como a es arbitrario, una nueva aplicación del Lema 2.4.5 permite concluir que $\mathcal{M} \not\models (\exists x)\neg(\exists z)f(x)='z$

II. Consideremos la estructura $\mathcal{M}_2 = \langle \mathbb{N}, <, >, I, 0 \rangle$, donde I es la función identidad. Luego,

$$
\begin{array}{l}
(\bar{\forall} n \in \mathbb{N}) I(n) = n \\
\Rightarrow \text{(def. semántica)} \\
(\bar{\forall} n \in \mathbb{N}) \mathcal{M}_2 \models f(\bar{n}) =' \bar{n} \\
\Rightarrow (2.4.5) \\
\mathcal{M}_2 \models (\forall x) f(x) =' x \\
\Rightarrow (2.4.5) \\
(\bar{\forall} n \in \mathbb{N}) \mathcal{M}_2 \models \neg(\exists z) f(\bar{n}) =' z \rightarrow (\forall x) f(x) =' x \\
\Rightarrow (2.4.5) \\
\mathcal{M}_2 \models (\forall x) \psi \\
\Rightarrow \text{(clausura)} \\
\mathcal{M}_2 \models \psi,
\end{array}
$$

que es lo que se quería probar

b. Defino $\sigma := (\forall x) P(x, x)$, donde P es el símbolo de predicado asociado con la segunda relación. Mostremos primero que $\mathcal{M}_3 \models \sigma$.

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M}_3 \models \sigma \\
\Leftarrow (2.4.5) \\
(\bar{\forall} \varphi \in \mathtt{PROP}) \mathcal{M}_3 \models P(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}) \\
\Leftarrow \text{(Def. semántica)} \\
(\bar{\forall} \varphi \in \mathtt{PROP}) \varphi \ \mathtt{eq} \ \varphi,
\end{array}
$$

y esto es inmediato porque `eq` es una relación de equivalencia.

Ahora definimos la estructura $\mathcal{M}'_2 = \langle \mathbb{N}, <, > \rangle$. Mostremos que $\mathcal{M}'_2 \not\models \sigma$.

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M}'_2 \not\models \sigma \\
\Leftarrow (2.4.5) \\
(\bar{\exists} n \in \mathbb{N}) \mathcal{M}'_2 \not\models P(\bar{n}, \bar{n}) \\
\Leftarrow \text{(Def. semántica y aritmética)} \\
(\bar{\exists} n \in \mathbb{N}) n \leq n,
\end{array}
$$

y esto es inmediato porque $\leq$ es una relación reflexiva. Como encontramos una estructura que no modela σ podemos concluír que $\not\models \sigma$.

Ejercicio 4 (25 puntos)

En este ejercicio trabajamos con el lenguaje `PROP`.

a. Construya dos conjuntos consistentes maximales diferentes. Justifique.

b. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifique sus respuestas.

I. Dados Γ y Γ' consistentes maximales, si $\Gamma \cap \Gamma'$ es consistente maximal entonces Γ y Γ' son iguales.

II. Dados Γ y Γ' Consistentes Maximales, si $\Gamma \cup \Gamma'$ es consistente maximal entonces Γ y Γ' son iguales.

III. Dados Γ y Γ' consistentes maximales, $\Gamma - \Gamma'$ es consistente maximal.

IV. La intersección de dos conjuntos inconsistentes nunca es consistente maximal.

Bosquejo de solución

a. Consideremos una valuación v arbitraria, y definamos el conjunto $\Gamma_v = \{\varphi : v(\varphi) = 1\}$. Por la forma de definirlo, Γ_v es satisfacible y por lo tanto consistente. Voy a probar que es consistente maximal.

   Sea Δ un conjunto tal que $\Gamma_v \subseteq \Delta$, y supongamos que hay un ψ tal que $\psi \in \Delta$ pero $\psi \notin \Gamma_v$. Luego,

$$
\begin{array}{l}
\psi \notin \Gamma_v \\
\Rightarrow \text{\scriptsize (Def. } \Gamma_v\text{)} \\
\neg\psi \in \Gamma_v \\
\Rightarrow {\scriptstyle (\Gamma_v \subseteq \Delta)} \\
\neg\psi \in \Delta \\
\Rightarrow {\scriptstyle (\psi \in \Delta)} \\
\Delta \text{ es inconsistente.}
\end{array}
$$

   O sea, cada valuación determina un conjunto consistente maximal. Consideremos las valuaciones v_0 que asigna cero a cada letra proposicional y v_1 que asigna uno a cada letra proposicional. Los conjuntos Γ_{v_0} y Γ_{v_1} son consistentes maximales. Además, son diferentes, ya que $p_0 \in \Gamma_{v_1}$ pero $p_0 \notin \Gamma_{v_0}$.

b.
   I. **VERDADERA.** Por conjuntos, sabemos que $\Gamma \cap \Gamma' \subseteq \Gamma$ y $\Gamma \cap \Gamma' \subseteq \Gamma'$. Como $\Gamma \cap \Gamma'$ es consistente maximal, y Γ y Γ' son consistentes, tenemos que $\Gamma \cap \Gamma' = \Gamma$ y $\Gamma \cap \Gamma' = \Gamma'$. Luego, Γ y Γ' son iguales.

   II. **VERDADERA.** Por conjuntos, sabemos que $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \Gamma'$ y $\Gamma' \subseteq \Gamma \cup \Gamma'$. Como Γ y Γ' son consistentes maximales y $\Gamma \cup \Gamma'$ es consistente, tenemos que $\Gamma \cup \Gamma' = \Gamma$ y $\Gamma \cup \Gamma' = \Gamma'$. Luego, Γ y Γ' son iguales.

   III. **FALSA.** Todas las tautologías están en cualquier conjunto consistente maximal. Por lo tanto, se encuentran en Γ y Γ'. Por conjuntos, sabemos que ninguna tautología aparece en $\Gamma - \Gamma'$, y por lo tanto la diferencia no puede ser consistente maximal.

   IV. **FALSA.** Sea Γ un conjunto consistente maximal. Sean $\Delta = \Gamma \cup \{\bot\}$ y $\Delta' = \Gamma \cup \{\bot \wedge \bot\}$. Tanto Δ como Δ' son inconsistentes porque contienen una contradicción. Además, $\Delta \cap \Delta' = \Gamma$. Hemos proporcionado dos conjuntos inconsistentes cuya intersección es consistente maximal, lo que termina nuestra justificación.