Examen de Lógica

10 de Diciembre de 2015

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **100** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Considere el alfabeto Σ formado por los naturales del 0 al 9.
Sea $\mathcal{L}$ siguiente lenguaje :

I Si $x \in \mathcal{L}$, entonces $x \in \Sigma$
II Si $x \in \Sigma$ y $\omega \in \mathcal{L}$, entonces $\omega \cdot x \in \mathcal{L}$

Considere la función $\texttt{Saca0} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ que saca todos los 0's no significativos (de la izquierda) definida de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} \texttt{Saca0}(x) & = x \\ \texttt{Saca0}(\omega \cdot x) & = \begin{cases} x & \text{si } \texttt{Saca0}(\omega) = 0 \\ \texttt{Saca0}(\omega) \cdot x & \text{en otro caso} \end{cases} \end{array}$$

a. Defina la función $\texttt{Eval} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{N}$ tal que para cada tira de $\mathcal{L}$ devuelve el natural que corresponde al interpretar las tiras como un decimal. Ej: $\texttt{Eval}(1{\cdot}0{\cdot}5) = 105$,$\texttt{Eval}(0{\cdot}0{\cdot}5{\cdot}0{\cdot}1) = 501$.

b. Pruebe por inducción que cualquier $\omega \in \mathcal{L}$ cumple $\texttt{Eval}(\texttt{Saca0}(\omega)) = \texttt{Eval}(\omega)$.

c. Pruebe por inducción que $\texttt{Saca0}$ es idempotente; o sea, que cualquier $\omega \in \mathcal{L}$ cumple $\texttt{Saca0}(\texttt{Saca0}(\omega)) = \texttt{Saca0}(\omega)$.

Bosquejo de solución

a.

$$\texttt{Eval}(x) = x$$
$$\texttt{Eval}(\omega \cdot x) = \texttt{Eval}(\omega) * 10 + x$$

b. **T)** $(\bar{\forall}\omega \in \mathcal{L})\, \texttt{Eval}(\texttt{Saca0}(\omega)) = \texttt{Eval}(\omega)$

Dem.) Por inducción en $\mathcal{L}$.
$P(\omega) := \texttt{Eval}(\texttt{Saca0}(\omega)) = \texttt{Eval}(\omega)$

Paso Base. T) $\texttt{Eval}(\texttt{Saca0}(x)) = \texttt{Eval}(x)$

Dem.) Por definición de $\texttt{Saca0}$

$$\texttt{Saca0}(x) = x$$

Aplicando $\texttt{Eval}$ a ambos lados obtenemos

$$\texttt{Eval}(\texttt{Saca0}(x)) = \texttt{Eval}(x)$$

■

Paso Inductivo. H) $\texttt{Eval}(\texttt{Saca0}(\omega)) = \texttt{Eval}(\omega)$

T) $\texttt{Eval}(\texttt{Saca0}(\omega \cdot x)) = \texttt{Eval}(\omega \cdot x)$

Dem.) Aquí hay que separar en dos casos:
Si $\texttt{Saca0}(\omega) = 0$

Por definición de $\texttt{Saca0}$ en este caso,

$$\texttt{Saca0}(\omega \cdot x) = x$$

por lo que:

$$\texttt{Eval}(\texttt{Saca0}(\omega \cdot x)) = \texttt{Eval}(x) = x$$

Aplicando la definición de $\texttt{Eval}$ tenemos que:

$$\texttt{Eval}(\omega \cdot x) = \texttt{Eval}(\omega) * 10 + x$$

Aplicando la hipotesis, podemos ver que:

$$\texttt{Eval}(\omega) * 10 + x = \texttt{Eval}(\texttt{Saca0}(\omega)) * 10 + x = \texttt{Eval}(0) * 10 + x = x$$

por lo que queda demostrada la tesis en este caso.
Si $\texttt{Saca0}(\omega) \neq 0$

Aplicando la definición de $\texttt{Saca0}$ en este caso y luego la de *Eval*, se obtiene:

$$\texttt{Eval}(\texttt{Saca0}(\omega \cdot x)) = \texttt{Eval}(\texttt{Saca0}(\omega) \cdot x) = \texttt{Eval}(\texttt{Saca0}(\omega)) * 10 + x$$

Aplicando la hipótesis sobre el último término, y la definición de $\texttt{Eval}$ obtenemos:

$$\texttt{Eval}(\texttt{Saca0}(\omega \cdot x)) = \texttt{Eval}(\omega) * 10 + x = \texttt{Eval}(\omega \cdot x)$$

En ambos casos se obtuvo la expresión de la tesis.

■

Por aplicación del principio de inducción primitiva, podemos afirmar que para cualquier $\omega \in \mathcal{L}$ se cumple la propiedad.

■

c. **T)** $(\bar{\forall}\omega \in \mathcal{L})\, \texttt{Saca0}(\texttt{Saca0}(\omega)) = \texttt{Saca0}(\omega)$

Dem.) Por inducción en $\mathcal{L}$.

$P(\omega) := \texttt{Saca0}(\texttt{Saca0}(\omega)) = \texttt{Saca0}(\omega)$

Paso Base.

T) $\texttt{Saca0}(\texttt{Saca0}(x)) = \texttt{Saca0}(x)$

Dem.) Por definición de $\texttt{Saca0}$ se cumple que $\texttt{Saca0}(x) = x$ por lo que, aplicando la función a ambos lados, obtenemos la tesis.

■

Paso Inductivo.

H) $\texttt{Saca0}(\texttt{Saca0}(\omega)) = \texttt{Saca0}(\omega)$

T) $\texttt{Saca0}(\texttt{Saca0}(\omega \cdot x)) = \texttt{Saca0}(\omega \cdot x)$

Dem.) Separamos en dos casos:

Si $\texttt{Saca0}(\omega) = 0$,

por la definición de Saca0, $\texttt{Saca0}(\omega \cdot x) = x$.
Aplicando la función a ambos lados de la igualdad y luego la definición de Saca0, obtenemos:

$$\texttt{Saca0}(\texttt{Saca0}(\omega \cdot x)) = \texttt{Saca0}(x) = x$$

Aplicando transitividad con la misma igualdad, obtenemos:

$$\texttt{Saca0}(\texttt{Saca0}(\omega \cdot x)) = x = \texttt{Saca0}(\omega \cdot x)$$

Si $\texttt{Saca0}(\omega) \neq 0$,

por la definición de Saca0,

$$\texttt{Saca0}(\omega \cdot x) = \texttt{Saca0}(\omega) \cdot x$$

Aplicando la hipótesis nos queda:

$$\texttt{Saca0}(\omega \cdot x) = \texttt{Saca0}(\texttt{Saca0}(\omega)) \cdot x$$

Porque se está en el caso en que $\texttt{Saca0}(\omega) \neq 0$, aplicando la hipótesis, entonces se obtiene

$$\texttt{Saca0}(\texttt{Saca0}(\omega)) \neq 0$$

Por esto último, se puede aplicar la definición de Saca0 en el caso $\neq 0$ del lado derecho de la última igualdad, podemos establecer que:

$$\texttt{Saca0}(\omega \cdot x) = \texttt{Saca0}(\texttt{Saca0}(\omega) \cdot x)$$

Aplicando nuevamente la definición de Saca0 obtenemos

$$\texttt{Saca0}(\omega \cdot x) = \texttt{Saca0}(\texttt{Saca0}(\omega \cdot x))$$

que ya es la tesis.

■

De esta forma, aplicando el principio de inducción primitiva para $\mathcal{L}$ se prueba que para cualquier elemento $\omega \in \mathcal{L}$ se cumple que $\texttt{Saca0}(\texttt{Saca0}(\omega)) = \texttt{Saca0}(\omega)$

■

Ejercicio 2 (13 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle -; 1, 2; 1 \rangle$, con dos símbolos de función f_1 y f_2, y un símbolo de constante c_0.

Sea una estructura $\mathcal{M}_1 = \langle \mathbb{N}, Pot_2, Sum, 1 \rangle$, donde Pot_2 es la función potencia de 2 y Sum es la función suma.

a. I. Escriba una sentencia α que interpretada en $\mathcal{M}_1$ sea:
para todos los naturales m se cumple $2^{(m+1)} = 2^m + 2^m$.

II. Pruebe: $\mathcal{M}_1 \models \alpha$

b. Considere la estructura $\mathcal{M}_2 = \langle \Sigma^*, F_1, F_2, \varepsilon \rangle$, donde $\Sigma = \{a, b\}$, F_1 elimina todas las ocurrencias de b de una tira, y F_2 concatena dos tiras y la fórmula α propuesta en la parte a.

I. Exprese en lenguaje natural el significado de α en $\mathcal{M}_2$

II. Determine si $\mathcal{M}_2 \models \alpha$. Justifique formalmente su respuesta.

Bosquejo de solución

a. I. $\alpha \equiv \forall x f_1(f_2(x, c_0)) =' f_2(f_1(x), f_1(x))$

II. Voy a probar que $\mathcal{M}_1 \models \alpha$.

$\mathcal{M}_1 \models \forall x f_1(f_2(x, c_0)) =' f_2(f_1(x), f_1(x)) \Leftrightarrow$ (2.4.5 y sustitución)
$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N}) \mathcal{M}_1 \models f_1(f_2(\bar{a}, c_0)) =' f_2(f_1(\bar{a}), f_1(\bar{a})) \Leftrightarrow$ (def. $\models$ y def. interpretación de sentencias)
$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N})(f_1(f_2(\bar{a}, c_0)))^{\mathcal{M}_1} = (f_2(f_1(\bar{a}), f_1(\bar{a})))^{\mathcal{M}_1} \Leftrightarrow$ (def. interpretación de términos)
$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N}) 2^{\bar{a}^{\mathcal{M}_1} + c_0^{\mathcal{M}_1}} = 2^{\bar{a}^{\mathcal{M}_1}} + 2^{\bar{a}^{\mathcal{M}_1}} \Leftrightarrow$ (def. interpretación de términos)
$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N}) 2^{a+1} = 2^a + 2^a$

Lo que es cierto por definición matemática de potencia y del producto.

b. I. Eliminar las b de concanetar la tira vacía a cualquier tira w es igual que concatenar dos veces la eliminacion de las b en la tira w.

II.

$\mathcal{M}_2 \models \forall x f_1(f_2(x, c_0)) =' f_2(f_1(x), f_1(x)) \Leftrightarrow$ (2.4.5 y sustitución)
$(\bar{\forall} w \in \Sigma^*) \mathcal{M}_2 \models f_1(f_2(\bar{w}, c_0)) =' f_2(f_1(\bar{w}), f_1(\bar{w})) \Leftrightarrow$ (def. $\models$ y def. interpretación)
$(\bar{\forall} w \in \Sigma^*)(f_1(f_2(\bar{w}, c_0)))^{\mathcal{M}_2} = (f_2(f_1(\bar{w}), f_1(\bar{w})))^{\mathcal{M}_2} \Leftrightarrow$ (def. interpretación para términos)
$(\bar{\forall} w \in \Sigma^*) F_1(F_2(\bar{w}^{\mathcal{M}_2}, c_0^{\mathcal{M}_2})) = F_2(F_1(\bar{w}^{\mathcal{M}_2}), F_1(\bar{w}^{\mathcal{M}_2})) \Leftrightarrow$ (def. interpretación de términos)
$(\bar{\forall} w \in \Sigma^*) F_1(F_2(w, \varepsilon)) = F_2(F_1(w), F_1(w))$

Esto no se cumple. Si tomamos $w = ab$ tenemos que $F_1(F_2(ab, \varepsilon)) = a$ y $F_2(F_1(ab), F_1(ab)) = aa$.

Dado que $a \neq aa$, tenemos un contraejemplo que muestra que

$$\mathcal{M}_2 \not\models \alpha$$

Ejercicio 3 (12 puntos)

Considere un lenguaje $\texttt{PROP}_\otimes$ que se obtiene agregando a la definición inductiva de $\texttt{PROP}$ el operador binario $\otimes$ mediante la siguiente cláusula.

- Si $\alpha \in \texttt{PROP}_\otimes$ y $\beta \in \texttt{PROP}_\otimes$, entonces $(\alpha \otimes \beta) \in \texttt{PROP}_\otimes$

Se extiende la definición de la función de valuación para este operador de la siguiente forma:

$$v((\alpha \otimes \beta)) = \begin{cases} 1 \text{ si } v(\alpha) = 0 \text{ y } v(\beta) = 1, \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Se define la siguiente familia de fórmulas de $\texttt{PROP}_\otimes$:

- $\varphi_0 = (p_0 \otimes p_0)$
- $\varphi_{n+1} = (\varphi_n \to p_{n+1})$

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta

a. $(\bar{\forall} n \in \mathbb{N})(\varphi_n \not\models \varphi_{n+1})$

b. $(\bar{\exists} n \in \mathbb{N})(\models \neg \varphi_n)$

Bosquejo de solución

a. **Falsa**. Voy a probar que $\varphi_0 \models \varphi_1$.

$$
\begin{array}{l}
\varphi_0 \models \varphi_1 \\
\Leftarrow \text{(Def. } \models) \\
(\bar{\forall} v)\text{si } v(\varphi_0) = 1 \text{ entonces } v(\varphi_1) = 1 \\
\Leftarrow \\
(\bar{\forall} v) v(\varphi_0) \neq 1 \\
\Leftarrow (v \text{ valuación}) \\
(\bar{\forall} v) v(\varphi_0) = 0 \\
\Leftarrow \text{(Def. } \varphi_0) \\
(\bar{\forall} v) v(p_0 \otimes p_0) = 0 \\
\Leftarrow \text{(Def. } v) \\
(\bar{\forall} v) v(p_0) = v(p_0).
\end{array}
$$

Tengo un contraejemplo para la frase dada tomando $n = 0$.

b. **Verdadera**. Voy a probar que $\models \neg\varphi_0$.

$$
\begin{array}{l}
\models \neg\varphi_0 \\
\Leftarrow \text{(Def. } \models) \\
(\bar{\forall} v) v(\neg\varphi_0) = 1 \\
\Leftarrow (v \text{ valuación}) \\
(\bar{\forall} v) v(\varphi_0) = 0 \\
\Leftarrow \text{(Def. } \varphi_0) \\
(\bar{\forall} v) v(p_0 \otimes p_0) = 0 \\
\Leftarrow \text{(Def. } v) \\
(\bar{\forall} v) v(p_0) = v(p_0).
\end{array}
$$

Tengo un testigo para la frase dada tomando $n = 0$.

Ejercicio 4 (25 puntos)

Considere la siguiente sentencia que vincula una función y una relación:

$$\alpha = \forall x \forall y \forall z (f(x, y) =' z \leftrightarrow P(x, y, z))$$

Construir derivaciones que justifiquen las siguientes afirmaciones.

a. $\alpha \vdash \exists x \exists y \exists z (P(x, y, z) \wedge P(y, x, z))$

b. $\alpha \vdash \forall x \forall y \forall z \forall z_1 (P(x, y, z) \wedge P(x, y, z_1) \rightarrow z =' z_1)$

Nota: En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas.

Bosquejo de solución

a.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{α}
\RightLabel{$E\forall^{*}$}
\UnaryInfC{$\forall y \forall z(f(x,y) =' z \leftrightarrow P(x,y,z))$}
\RightLabel{$E\forall^{****}$}
\UnaryInfC{$\forall z(f(x,x) =' z \leftrightarrow P(x,x,z))$}
\RightLabel{$E\forall^{***}$}
\UnaryInfC{$f(x,x) =' f(x,x) \leftrightarrow P(x,x,f(x,x))$}
\AxiomC{}
\RightLabel{RI_1}
\UnaryInfC{$f(x,x) =' f(x,x)$}
\RightLabel{$E\leftrightarrow_1$}
\BinaryInfC{$P(x,x,f(x,x))$}
\AxiomC{α}
\RightLabel{$E\forall^{*}$}
\UnaryInfC{$\forall y \forall z(f(x,y) =' z \leftrightarrow P(x,y,z))$}
\RightLabel{$E\forall^{****}$}
\UnaryInfC{$\forall z(f(x,x) =' z \leftrightarrow P(x,x,z))$}
\RightLabel{$E\forall^{***}$}
\UnaryInfC{$f(x,x) =' f(x,x) \leftrightarrow P(x,x,f(x,x))$}
\AxiomC{}
\RightLabel{RI_1}
\UnaryInfC{$f(x,x) =' f(x,x)$}
\RightLabel{$E\leftrightarrow_1$}
\BinaryInfC{$P(x,x,f(x,x))$}
\RightLabel{$I\wedge$}
\BinaryInfC{$P(x,x,f(x,x)) \wedge P(x,x,f(x,x))$}
\RightLabel{$I\exists^{***}$}
\UnaryInfC{$\exists z(P(x,x,z) \wedge P(x,x,z))$}
\RightLabel{$I\exists^{**}$}
\UnaryInfC{$\exists y \exists z(P(x,y,z) \wedge P(y,x,z))$}
\RightLabel{$I\exists^{*}$}
\UnaryInfC{$\exists x \exists y \exists z(P(x,y,z) \wedge P(y,x,z))$}
\end{prooftree}
$$

* El término x está libre para la variable x en cualquier fórmula.

** El término x está libre para la variable y en $\exists z(P(x,y,z) \wedge P(y,x,z))$, porque $x \neq z$.

*** Cualquier término está libre para cualquier variable en cualquier fórmula abierta.

**** El término x está libre para la variable y en $\forall z(f(x,x) =' z \leftrightarrow (P(x,x,z))$, porque $x \neq z$.

b. Defino $\beta := P(x,y,z) \wedge P(x,y,z_1)$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{α}
\RightLabel{$E\forall^{*}$}
\UnaryInfC{$\forall y \forall z(f(x,y) =' z \leftrightarrow P(x,y,z))$}
\RightLabel{$E\forall^{*}$}
\UnaryInfC{$\forall z(f(x,y) =' z \leftrightarrow P(x,y,z))$}
\RightLabel{$E\forall^{**}$}
\UnaryInfC{$f(x,y) =' z \leftrightarrow P(x,y,z)$}
\AxiomC{$[\beta]^1$}
\RightLabel{$E\wedge_1$}
\UnaryInfC{$P(x,y,z)$}
\RightLabel{$E\leftrightarrow_2$}
\BinaryInfC{$f(x,y) =' z$}
\AxiomC{α}
\RightLabel{$E\forall^{*}$}
\UnaryInfC{$\forall y \forall z(f(x,y) =' z \leftrightarrow P(x,y,z))$}
\RightLabel{$E\forall^{*}$}
\UnaryInfC{$\forall z(f(x,y) =' z \leftrightarrow P(x,y,z))$}
\RightLabel{$E\forall^{**}$}
\UnaryInfC{$f(x,y) =' z_1 \leftrightarrow P(x,y,z_1)$}
\AxiomC{$[\beta]^1$}
\RightLabel{$E\wedge_2$}
\UnaryInfC{$P(x,y,z_1)$}
\RightLabel{$E\leftrightarrow_2$}
\BinaryInfC{$f(x,y) =' z_1$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$RI1$}
\UnaryInfC{$f(x,y) =' f(x,y)$}
\RightLabel{$RI4^{**}$}
\TrinaryInfC{$z =' z_1$}
\RightLabel{$I\rightarrow^1$}
\UnaryInfC{$P(x,y,z) \wedge P(x,y,z_1) \rightarrow z =' z_1$}
\RightLabel{$I\forall^{***}$}
\UnaryInfC{$\forall z_1(P(x,y,z) \wedge P(x,y,z_1) \rightarrow z =' z_1)$}
\RightLabel{$I\forall^{***}$}
\UnaryInfC{$\forall z \forall z_1(P(x,y,z) \wedge P(x,y,z_1) \rightarrow z =' z_1)$}
\RightLabel{$I\forall^{***}$}
\UnaryInfC{$\forall y \forall z \forall z_1(P(x,y,z) \wedge P(x,y,z_1) \rightarrow z =' z_1)$}
\RightLabel{$I\forall^{***}$}
\UnaryInfC{$\forall x \forall y \forall z \forall z_1(P(x,y,z) \wedge P(x,y,z_1) \rightarrow z =' z_1)$}
\end{prooftree}
$$

* Cualquier variable (como término) está libre para ella misma en cualquier fórmula.

** Cualquier término está libre para cualquier variable en cualquier fórmula abierta.

*** Ninguna variable pertenece a $\mathrm{FV}(\alpha)$, porque α es una sentencia.

Ejercicio 5 (25 puntos)

Considere un lenguaje $\mathcal{L}$ de primer orden con tipo de similaridad $\langle 1; -; 0 \rangle$.
Sea $\Gamma \subseteq \mathtt{FORM}_{\mathcal{L}}$ el siguiente conjunto:

$$\Gamma = \textsc{Cons}(\{(\exists x)(\neg P(x))\})$$

Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifique sus respuestas.

a. Existen dos teorías inconsistentes tales que $\Delta_1 \subset \Delta_2$.

b. Existe al menos una *teoría* Δ consistente tal que $\Gamma \subset \Delta$.

c. Existe al menos una *teoría* Δ tal que $\Delta \subset \Gamma$.

Nota: Recuerde que $\subset$ denota la relación de inclusión estricta entre conjuntos.

Bosquejo de solución

a. **Falsa.** Sea Δ una teoría inconsistente cualquiera. Voy a probar que toda fórmula de $\mathtt{SENT}_{\mathcal{L}}$ está en Δ, y por lo tanto la inclusión estricta es falsa. Sea $\varphi \in \mathtt{SENT}_{\mathcal{L}}$. Luego,

$$
\begin{array}{l}
\varphi \in \Delta \\
\Leftarrow \text{(Las teorías son cerradas bajo derivación.)} \\
\Delta \vdash \varphi \\
\Leftarrow \text{(Construyo una derivación de } \varphi \text{ aplicando la regla de eliminación del } \bot \text{ a una derivación de } \bot.) \\
\Delta \vdash \bot,
\end{array}
$$

y la inconsistencia de Δ garantiza que esto último se cumple.

b. **Verdadera.** Defino $\Delta := \textsc{Cons}\,\{(\exists x)\neg P(x), (\exists x)P(x)\}$. Primero voy a probar que $\Gamma \subseteq \Delta$.

$$
\begin{array}{l}
\varphi \in \Delta \\
\Leftarrow \text{(Def. } \textsc{Cons}) \\
(\exists x)\neg P(x), (\exists x)P(x) \vdash \varphi \\
\Leftarrow \text{(Definición } \mathtt{DER} \text{ e inclusión de las hipótesis)} \\
(\exists x)\neg P(x) \vdash \varphi \\
\Leftarrow \text{(Def. } \textsc{Cons}) \\
\varphi \in \Gamma.
\end{array}
$$

La derivación trivial muestra que $(\exists x)P(x) \in \Delta$. Mostraré que $(\exists x)P(x) \notin \Gamma$, con lo que se justifica la inclusión estricta.

$$
\begin{array}{l}
(\exists x)P(x) \notin \Gamma \\
\Leftarrow \text{(Def. } \Gamma) \\
(\exists x)\neg P(x) \nvdash (\exists x)P(x) \\
\Leftarrow \text{(Completitud)} \\
(\exists x)\neg P(x) \not\models (\exists x)P(x) \\
\Leftarrow \text{(Def. } \models) \\
(\bar{\exists}\mathcal{M})\mathcal{M} \models (\exists x)\neg P(x) \text{ y } \mathcal{M} \not\models (\exists x)P(x) \\
\Leftarrow \text{(Tomo como testigo la estructura } \langle \{\bullet\}, \emptyset \rangle) \\
\langle \{\bullet\}, \emptyset \rangle \models (\exists x)\neg P(x) \text{ y } \langle \{\bullet\}, \emptyset \rangle \not\models (\exists x)P(x) \\
\Leftarrow (2,4,5) \\
(\bar{\exists} a \in \{\bullet\})\, \langle \{\bullet\}, \emptyset \rangle \models \neg P(\bar{a}) \text{ y } (\bar{\exists} a \in \{\bullet\})\, \langle \{\bullet\}, \emptyset \rangle \not\models P(\bar{a}) \\
\Leftarrow \text{(tomando como testigo } \bullet) \\
\langle \{\bullet\}, \emptyset \rangle \models \neg P(\bar{\bullet}) \text{ y } \langle \{\bullet\}, \emptyset \rangle \not\models P(\bar{\bullet}) \\
\Leftarrow (2,4,5) \\
\langle \{\bullet\}, \emptyset \rangle \not\models P(\bar{\bullet}) \\
\Leftarrow \text{(Def. } \models) \\
v^{\langle \{\bullet\}, \emptyset \rangle}(P(\bar{\bullet})) = 0 \\
\Leftarrow \text{(Def. interpretación en la estructura } \langle \{\bullet\}, \emptyset \rangle) \\
\bullet \notin \emptyset.
\end{array}
$$

Finalmente, probaré que Δ es consistente, mostrando que $\mathcal{M} = \langle \{\bullet, \circ\}, \{\bullet\} \rangle$ es un modelo de Δ.

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models \textsc{Cons}\,\{(\exists x)\neg P(x), (\exists x)P(x)\} \Leftrightarrow \text{(completitud)} \\
\mathcal{M} \models (\exists x)\neg P(x) \text{ y } \mathcal{M} \models (\exists x)P(x)
\end{array}
$$

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} \models (\exists x)\neg P(x) \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\ (\bar{\exists} a \in \{\bullet, \circ\})\mathcal{M} \models \neg P(\bar{a}) \Leftrightarrow \text{(def } \models \text{ y def. interpretación sentencias)} \\ (\bar{\exists} a \in \{\bullet, \circ\})(a \notin \{\bullet\}) \end{array}$$

Tomo como testigo a $\circ$

$$\begin{array}{l} \mathcal{M} \models (\exists x)P(x) \Leftrightarrow \text{(2.4.5)} \\ (\bar{\exists} a \in \{\bullet, \circ\})\mathcal{M} \models P(\bar{a}) \Leftrightarrow \text{(def } \models \text{ y def. interpretación sentencias)} \\ (\bar{\exists} a \in \{\bullet, \circ\})(a \in \{\bullet\}) \end{array}$$

Tomo como testigo a $\bullet$

c. **Verdadera.** Consideremos $\Delta = \textsc{Cons}(\emptyset)$ el conjunto de todos los teoremas. $\Delta \subsetneq \textsc{Cons}(\Delta_1)$ con Δ_1 cualquier conjunto de fórmulas, por las definiciones de derivación y de $\textsc{Cons}$.

En particular, resta probar la inclusión estricta, por lo que hay que probar que $(\exists x)(\neg P(x)) \notin \Delta$. Dado que el conjunto de todos los teoremas es el conjunto de las fórmulas lógicamente válidas, para esto tenemos que probar que existe una estructura que **no** es modelo de $(\exists x)(\neg P(x))$. Una estructura posible es $\langle \{\bullet\}, \{\bullet\} \rangle$ ya que todos los elementos cumplen con el predicado.