

Ejercicio 1 - Solución

Nicolás Gammarano

a) Se toman los tiristores como en la figura 1.

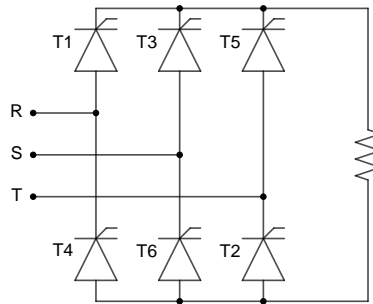


Figura 1: Convertidor 6 pulsos 2 vías con carga resistiva.

A partir de la figura 1b de la letra, se puede ver que

$$U_c = \cos(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arccos(U_c)$$

El valor medio de la tensión de salida se calcula utilizando la definición de valor medio

$$\langle v_o(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_o(\theta) d\theta$$

Caso 1.

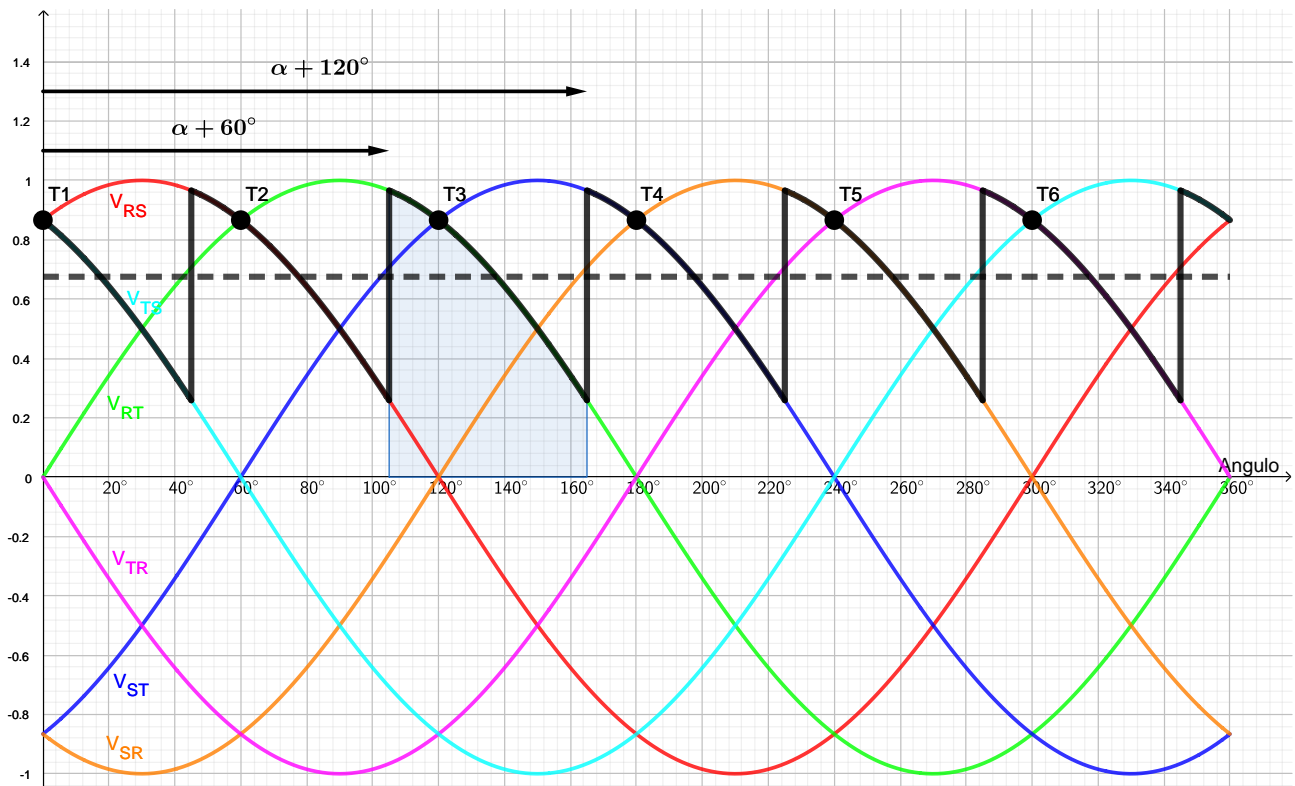


Figura 2: Tensiones compuestas, tensión de salida y tensión media de salida. El eje de las ordenadas está normalizado a $\sqrt{2}U = 1$.

$$\langle v_o(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} 6 \int_{\frac{\pi}{3}+\alpha}^{\frac{2\pi}{3}+\alpha} (U\sqrt{2} \sin(\theta)) d\theta = \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U \int_{\frac{\pi}{3}+\alpha}^{\frac{2\pi}{3}+\alpha} \sin(\theta) d\theta = \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U \cos(\theta) \Big|_{\frac{\pi}{3}+\alpha}^{\frac{2\pi}{3}+\alpha}$$

$$\langle v_o(t) \rangle = \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) \right)$$

$$\langle v_o(t) \rangle = \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(\alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(\alpha) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cos(\alpha) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \sin(\alpha) \right)$$

Sabiendo que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ y $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, se obtiene

$$\langle v_o(t) \rangle = \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U \left(\frac{1}{2} \cos(\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\alpha) + \frac{1}{2} \cos(\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\alpha) \right)$$

Finalmente, se obtiene

$$\langle v_o(t) \rangle = \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U \cos(\alpha)$$

También se puede plantear la integral utilizando un coseno en lugar de un seno, poniendo consistentemente los límites de integración:

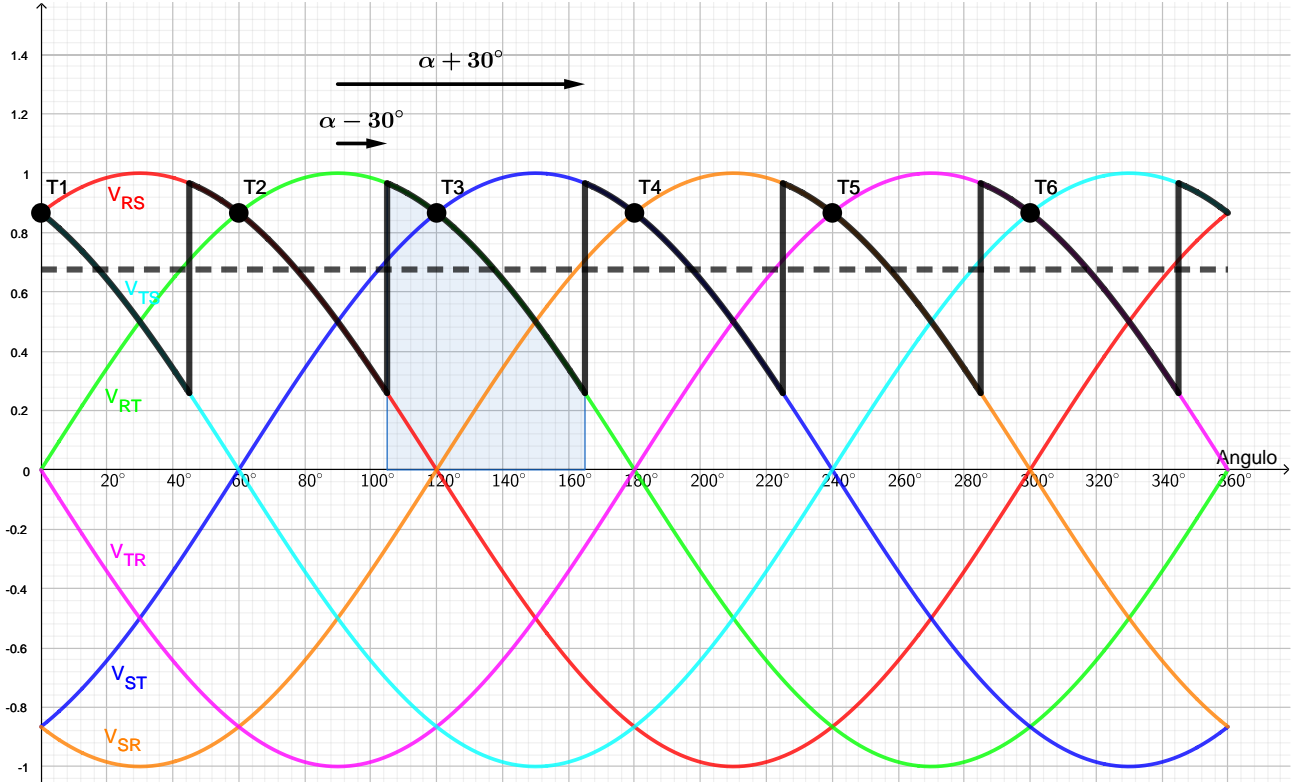


Figura 3: Tensiones compuestas, tensión de salida y tensión media de salida. El eje de las ordenadas está normalizado a $\sqrt{2}U = 1$.

$$\langle v_o(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} 6 \int_{-\frac{\pi}{6}+\alpha}^{\frac{\pi}{6}+\alpha} (U\sqrt{2} \cos(\theta)) d\theta = \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U \int_{-\frac{\pi}{6}+\alpha}^{\frac{\pi}{6}+\alpha} \cos(\theta) d\theta = \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U \sin(\theta) \Big|_{-\frac{\pi}{6}+\alpha}^{\frac{\pi}{6}+\alpha}$$

$$\langle v_o(t) \rangle = \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U \left(\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \right)$$

$$\langle v_o(t) \rangle = \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U \left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(\alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(\alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(\alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(\alpha) \right)$$

Sabiendo que $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ y $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, se obtiene

$$\langle v_o(t) \rangle = \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U \left(\frac{1}{2} \cos(\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\alpha) + \frac{1}{2} \cos(\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\alpha) \right)$$

Finalmente, se obtiene

$$\langle v_o(t) \rangle = \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U \cos(\alpha)$$

Notar que esta expresión es válida siempre que $v_o(t) \geq 0$, es decir siempre que $\frac{2\pi}{3} + \alpha \leq \pi$, lo que equivale a $\alpha \leq \frac{\pi}{3}$.

Esto es debido a que si tuviéramos $v_o(t) < 0$, entonces también tendríamos $i_o(t) = \frac{v_o(t)}{R} < 0$, pero esto no es posible dado que los tiristores solamente pueden conducir corriente en el sentido A-K (ánodo-cátodo). Lo que ocurre entonces para $\alpha > \frac{\pi}{3}$ es que hay instantes de tiempo en los que el convertidor está apagado (no conduce ningún tiristor), y en dichos instantes se tiene $v_o(t) = 0$ e $i_o(t) = 0$.

Caso 2.

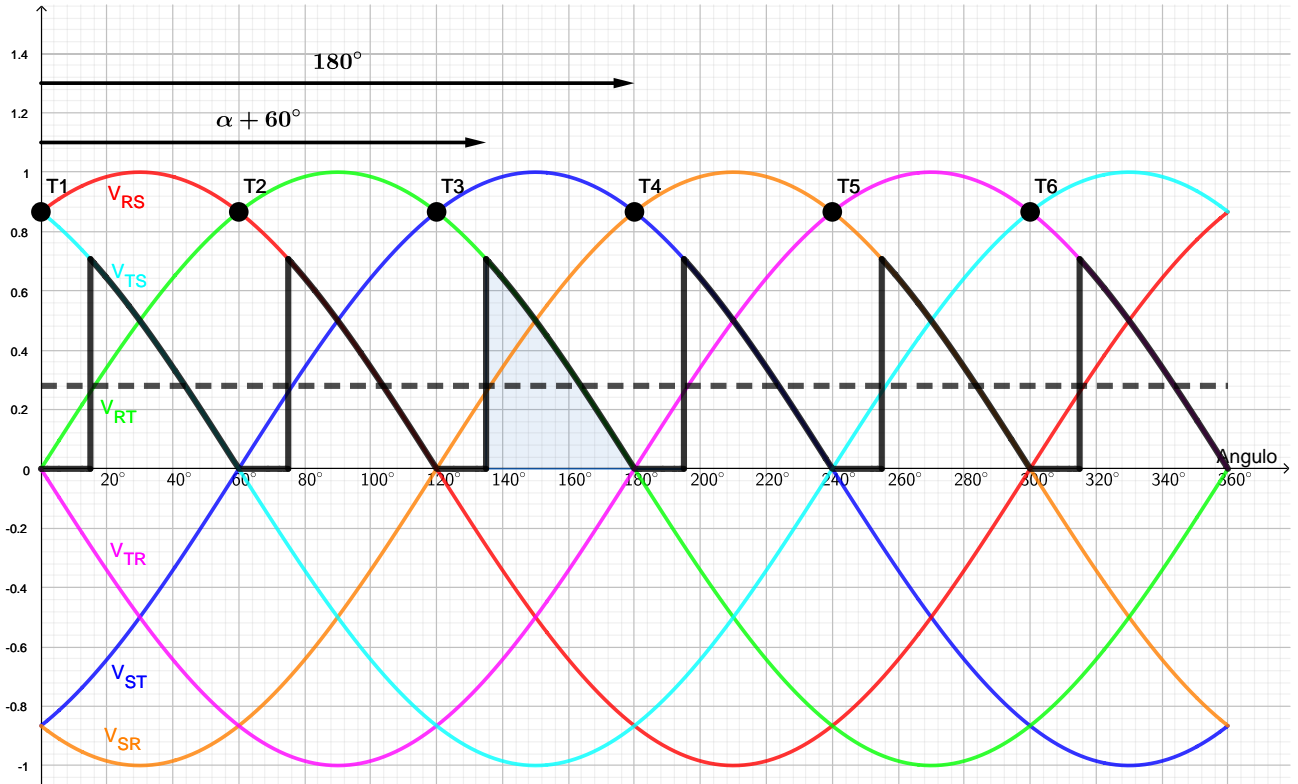


Figura 4: Tensiones compuestas, tensión de salida y tensión media de salida. El eje de las ordenadas está normalizado a $\sqrt{2}U = 1$.

$$\langle v_o(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} 6 \int_{\frac{\pi}{3} + \alpha}^{\pi} (U \sqrt{2} \sin(\theta)) d\theta = \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U \int_{\frac{\pi}{3} + \alpha}^{\pi} \sin(\theta) d\theta = \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U \cos(\theta) \Big|_{\frac{\pi}{3} + \alpha}^{\pi}$$

$$\langle v_o(t) \rangle = \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \cos(\pi) \right) = \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \right)$$

Al igual que en el caso anterior, también se puede plantear la integral utilizando un coseno en lugar de un seno, poniendo consistentemente los límites de integración:

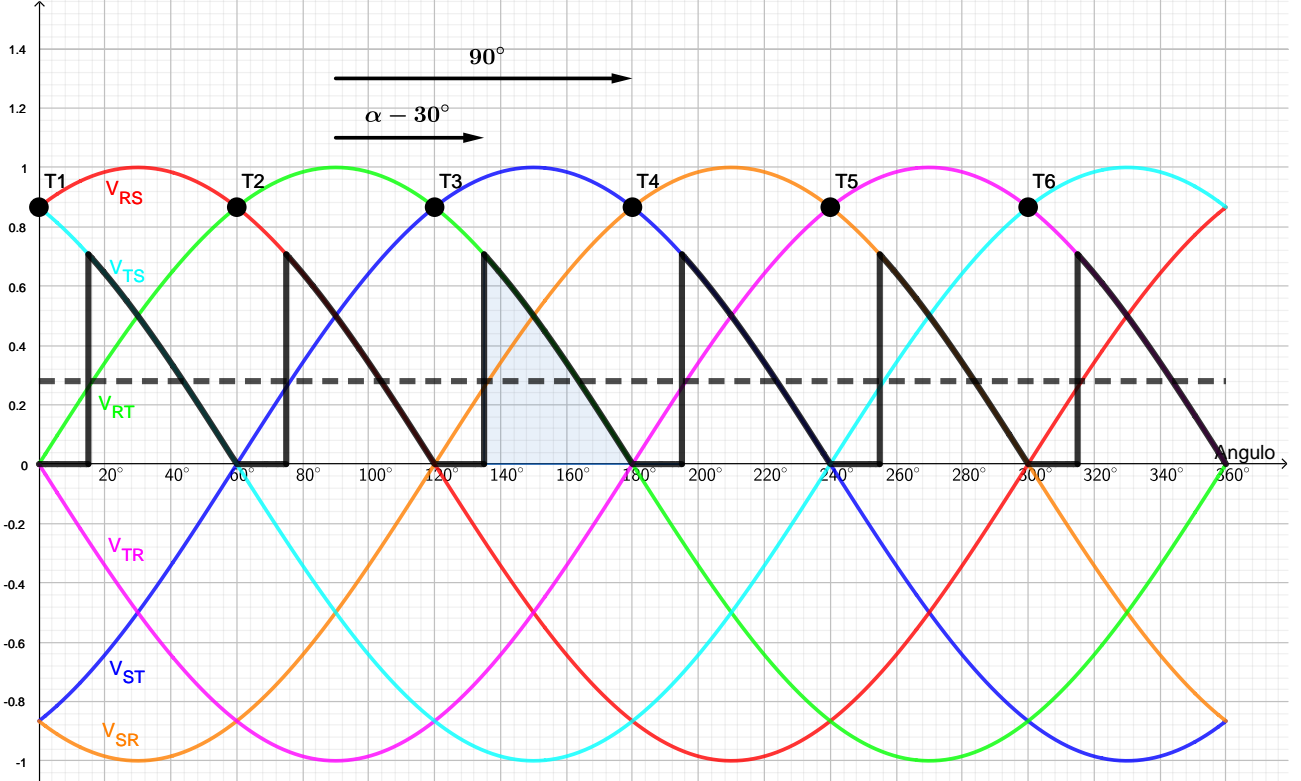


Figura 5: Tensiones compuestas, tensión de salida y tensión media de salida. El eje de las ordenadas está normalizado a $\sqrt{2}U = 1$.

$$\langle v_o(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} 6 \int_{-\frac{\pi}{6} + \alpha}^{\frac{\pi}{2}} (U\sqrt{2} \cos(\theta)) d\theta = \frac{3}{\pi} \sqrt{2}U \int_{-\frac{\pi}{6} + \alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) d\theta = \frac{3}{\pi} \sqrt{2}U \sin(\theta) \Big|_{-\frac{\pi}{6} + \alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\langle v_o(t) \rangle = \frac{3}{\pi} \sqrt{2}U \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \right) = \frac{3}{\pi} \sqrt{2}U \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) \right)$$

Si bien pareciera que los resultados fueran distintos, en realidad no lo son, ya que

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(\alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cos(\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\alpha) \\ \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(\alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cos(\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\alpha) \end{cases}$$

Notar que esta expresión es válida siempre que $\frac{2\pi}{3} + \alpha > \pi$ y que $\frac{\pi}{3} + \alpha \leq \pi$, es decir siempre que $\alpha > \frac{\pi}{3}$ y que $\alpha \leq \frac{2\pi}{3}$.

Caso 3.

Por último, si $\frac{\pi}{3} + \alpha > \pi$ (es decir $\alpha > \frac{2\pi}{3}$), entonces siempre que se intenta disparar un tiristor, el mismo tiene tensión A-K (ánodo-cátodo) negativa, por lo que no enciende. Entonces $v_o(t) = 0$ para todo tiempo t , y

$$\langle v_o(t) \rangle = 0$$

Resumiendo, se tiene que la transferencia $\langle v_o(t) \rangle = f(\alpha)$ es

$$\langle v_o(t) \rangle = \begin{cases} \frac{3}{\pi} \sqrt{2}U \cos(\alpha) & \forall \alpha \in (0, \frac{\pi}{3}] \\ \frac{3}{\pi} \sqrt{2}U (1 + \cos(\frac{\pi}{3} + \alpha)) & \forall \alpha \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}] \\ 0 & \forall \alpha \in (\frac{2\pi}{3}, \pi) \end{cases}$$

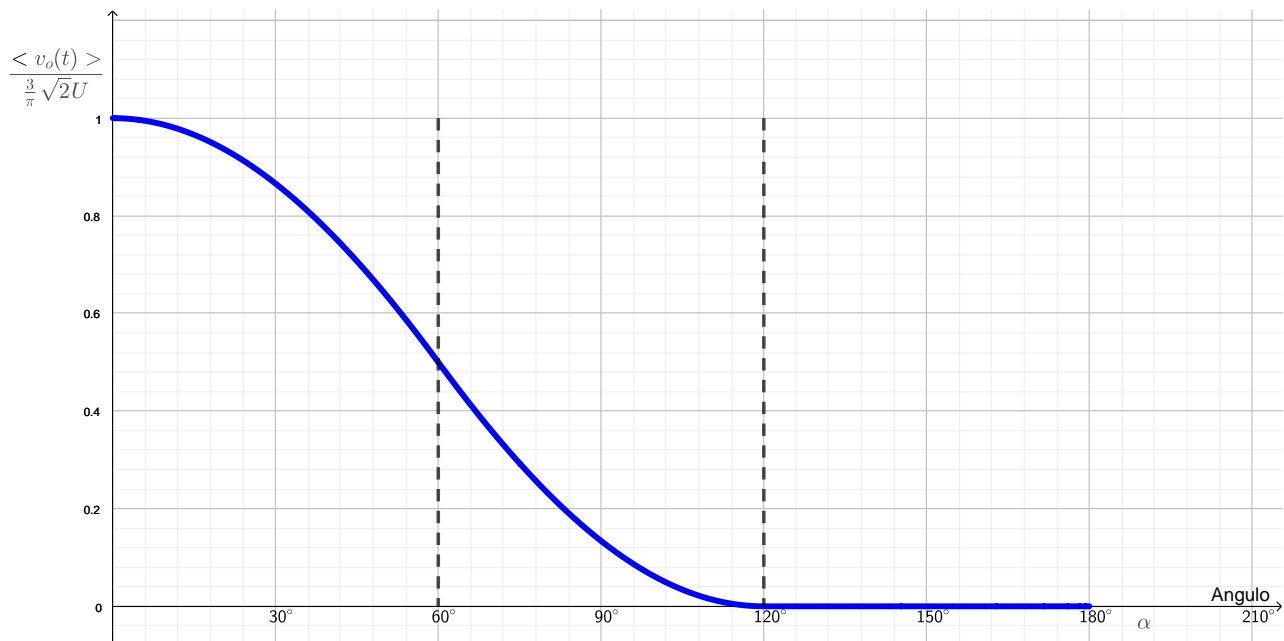


Figura 6: Transferencia normalizada $\frac{\langle v_o(t) \rangle}{\frac{3}{\pi} \sqrt{2} U}$ en función del ángulo de disparo α .

Como $U_c = \cos(\alpha)$, entonces la transferencia $\langle v_o(t) \rangle = f(U_c)$ queda

$$\langle v_o(t) \rangle = \begin{cases} \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U U_c & \forall U_c \in [\frac{1}{2}, 1) \\ \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U (1 + \cos(\frac{\pi}{3} + \arccos(U_c))) & \forall U_c \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ 0 & \forall U_c \in (-1, -\frac{1}{2}) \end{cases}$$

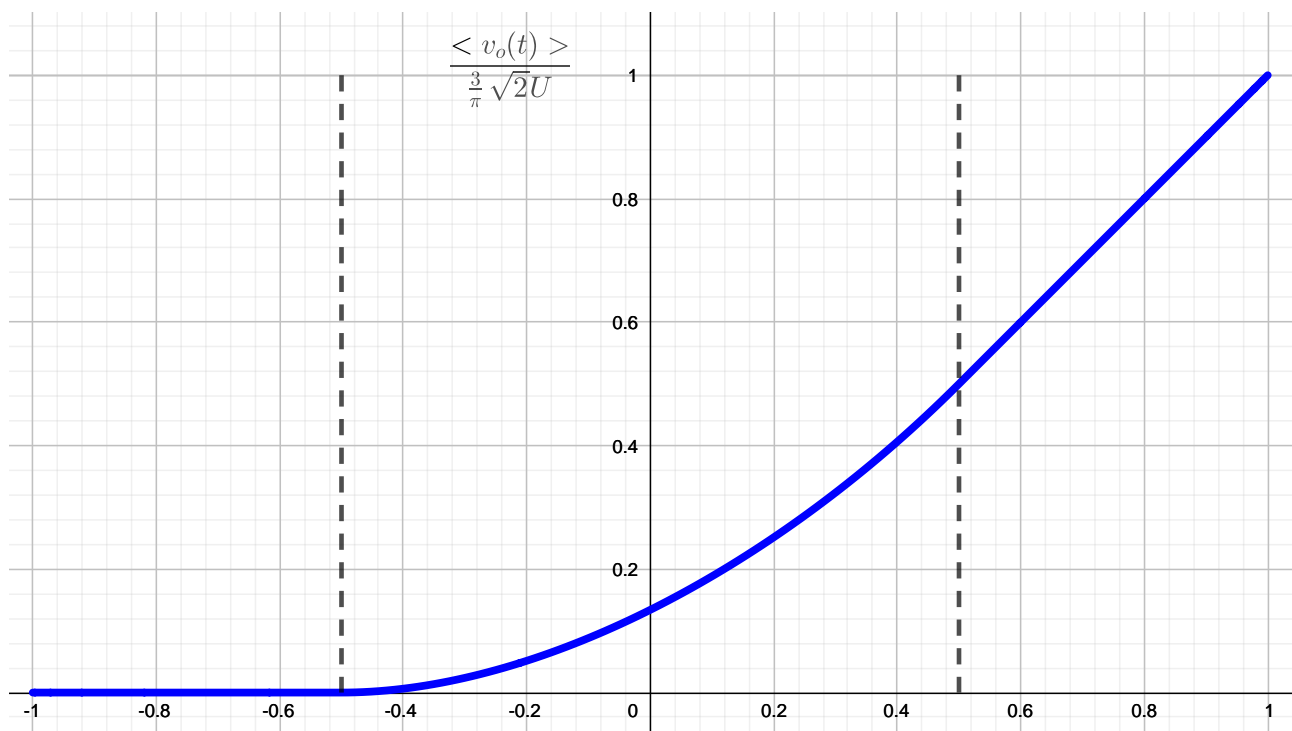


Figura 7: Transferencia normalizada $\frac{\langle v_o(t) \rangle}{\frac{3}{\pi} \sqrt{2} U}$ en función del voltaje de control U_c .

Notar que $\langle v_o(t) \rangle$ es lineal con respecto a U_c para U_c entre $\frac{1}{2}$ y 1 (para α entre 0 y $\frac{\pi}{3}$).

Valores notables:

U_c	$\langle v_o(t) \rangle$
1	$\frac{3}{\pi} \sqrt{2} U$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{\pi} \sqrt{2} \frac{U}{2}$
$-\frac{1}{2}$	0
-1	0

Cuadro 1: Valores notables de U_c para una red trifásica directa.

- b) 1) A continuación se tienen las tensiones de fase V_R , V_S y V_T para rotación horaria (figura 8) y para rotación anti-horaria (figura 9).

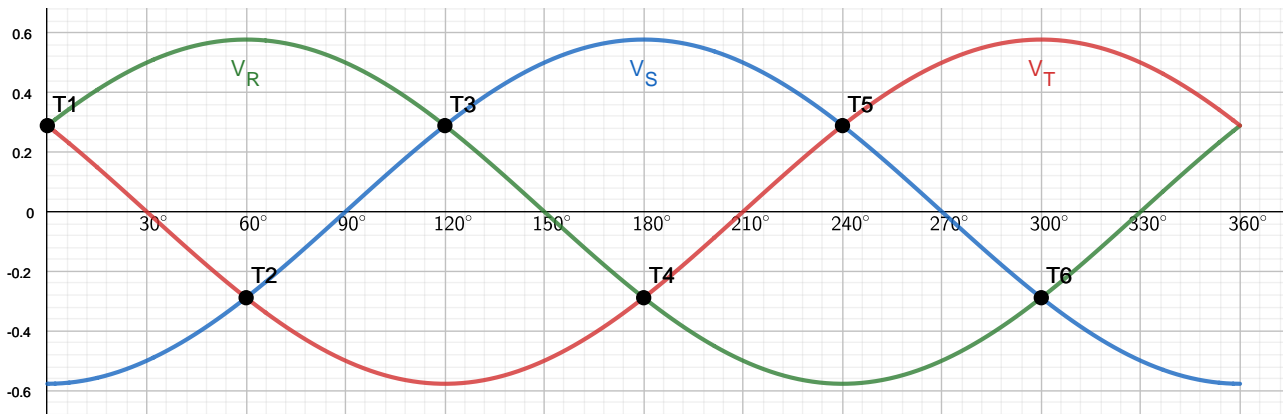


Figura 8: Tensiones de fase e instantes de conmutación natural de los tiristores 1 a 6 para rotación horaria (directo). El eje de las ordenadas está normalizado a $\sqrt{2}U = 1$.

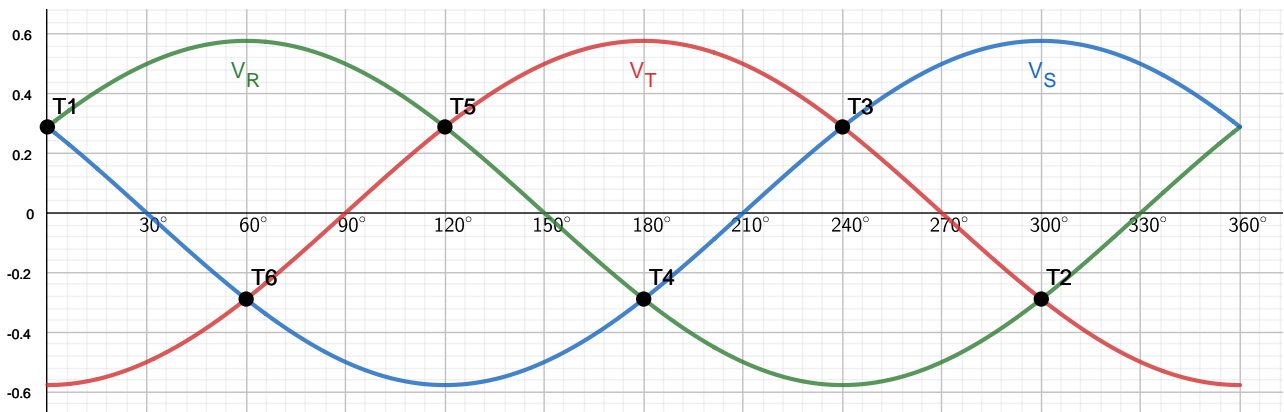


Figura 9: Tensiones de fase e instantes de conmutación natural de los tiristores 1 a 6 para rotación anti-horaria (inverso). El eje de las ordenadas está normalizado a $\sqrt{2}U = 1$.

Observar que el orden de disparo de los tiristores en un sistema trifásico directo es

$$T1 \rightarrow T2 \rightarrow T3 \rightarrow T4 \rightarrow T5 \rightarrow T6 \rightarrow \dots$$

mientras que en un sistema trifásico inverso es

$$T6 \rightarrow T5 \rightarrow T4 \rightarrow T3 \rightarrow T2 \rightarrow T1 \rightarrow \dots$$

- 2) Se puede ver que utilizando el control arco-coseno, los tiristores deberían dispararse con fases distintas para un sistema trifásico inverso que para uno directo. A modo de ejemplo, el tiristor 1 debería

dispararse con la fase $-V_S$ para un sistema trifásico directo, pero con la fase $-V_T$ para un sistema trifásico inverso.

Tiristor	Tensión de fase	
	Trifásica directa	Trifásica inversa
1	$-V_S$	$-V_T$
2	V_R	V_S
3	$-V_T$	$-V_R$
4	V_S	V_T
5	$-V_R$	$-V_S$
6	V_T	V_R

Cuadro 2: Tensión de fase con la que debe dispararse cada tiristor para sistema trifásico horario (directo) y anti-horario (inverso).

Observar que como el comando se mantiene (se utiliza el comando de la columna “Trifásica directa” del cuadro 2 para un sistema trifásico inverso), entonces se dispara con las fases incorrectas.

Recordar los disparos de confirmación: cuando se dispara un tiristor, también se dispara al tiristor “anterior” (por ejemplo, cuando se dispara T2 también se dispara T1, cuando se dispara T3 también se dispara T2, y así con los demás).

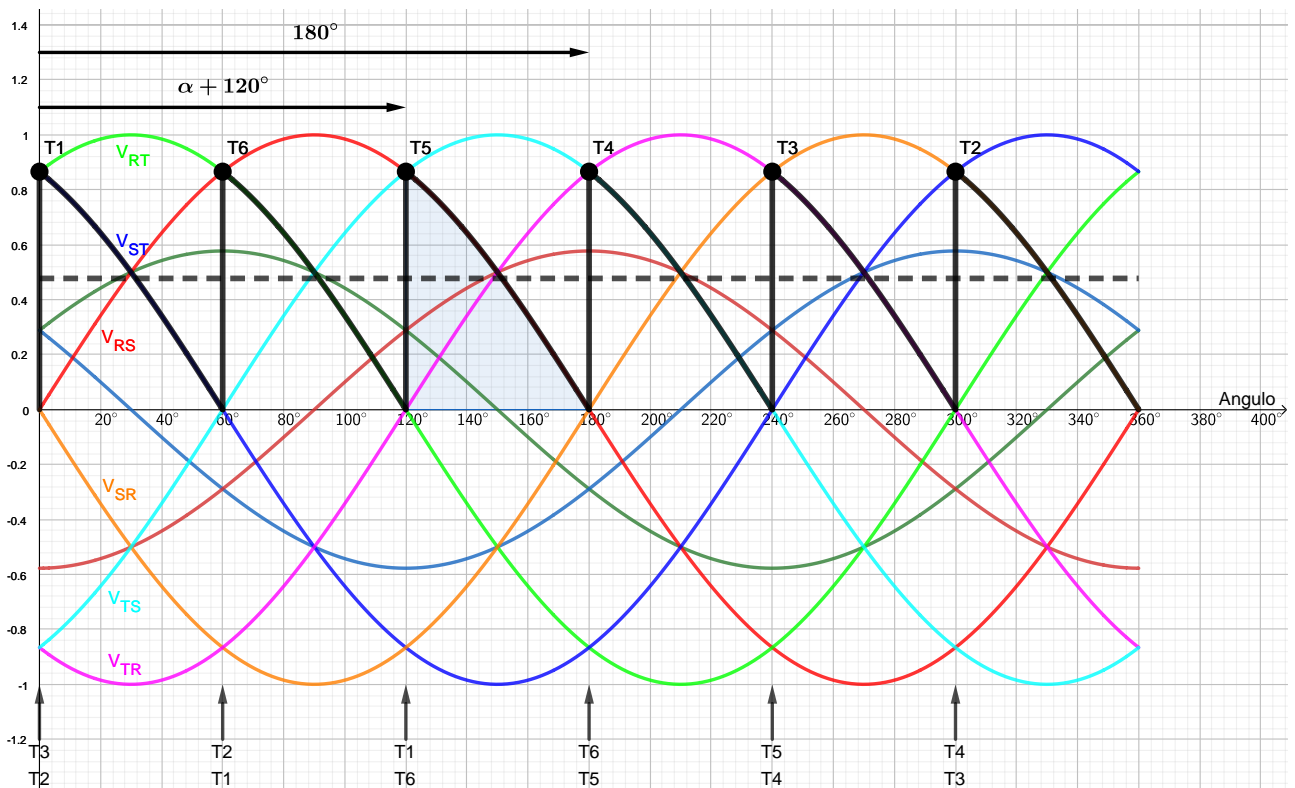


Figura 10: Tensiones compuestas, tensión de salida y tensión media de salida para $U_c = 1$. El eje de las ordenadas está normalizado a $\sqrt{2}U = 1$. Las flechas marcan los disparos (incluyendo el disparo de confirmación).

La tensión de salida del convertidor para $U_c = 1$ queda

$$\langle v_o(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} 6 \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (U\sqrt{2} \sin(\theta)) d\theta = \frac{3}{\pi} \sqrt{2}U \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sin(\theta) d\theta = \frac{3}{\pi} \sqrt{2}U \cos(\theta) \Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}$$

$$\langle v_o(t) \rangle = \frac{3}{\pi} \sqrt{2}U \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos(\pi) \right) = \frac{3}{\pi} \sqrt{2}U \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{\pi} \sqrt{2} \frac{U}{2}$$

c) La tensión de salida del convertidor para en función del ángulo de disparo α queda

$$\langle v_o(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} 6 \int_{\frac{2\pi}{3} + \alpha}^{\pi} (U\sqrt{2} \sin(\theta)) d\theta = \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U \int_{\frac{2\pi}{3} + \alpha}^{\pi} \sin(\theta) d\theta = \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U \cos(\theta) \Big|_{\frac{2\pi}{3} + \alpha}^{\pi}$$

$$\langle v_o(t) \rangle = \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) - \cos(\pi) \right) = \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) \right)$$

Observar que en este caso son los disparos de confirmación los disparos efectivos.

Por el mismo motivo que en la parte a), esta expresión es válida siempre que $v_o(t) \geq 0$, es decir siempre que $\frac{2\pi}{3} + \alpha \leq \pi$, lo que equivale a $\alpha \leq \frac{\pi}{3}$.

Para $\alpha > \frac{\pi}{3}$, se tiene que $v_o(t) = 0$ para todo tiempo t , y entonces

$$\langle v_o(t) \rangle = 0$$

Resumiendo, se tiene que la transferencia $\langle v_o(t) \rangle = f^*(\alpha)$ es

$$\langle v_o(t) \rangle = \begin{cases} \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U (1 + \cos(\frac{2\pi}{3} + \alpha)) & \forall \alpha \in (0, \frac{\pi}{3}] \\ 0 & \forall \alpha \in (\frac{\pi}{3}, \pi) \end{cases}$$

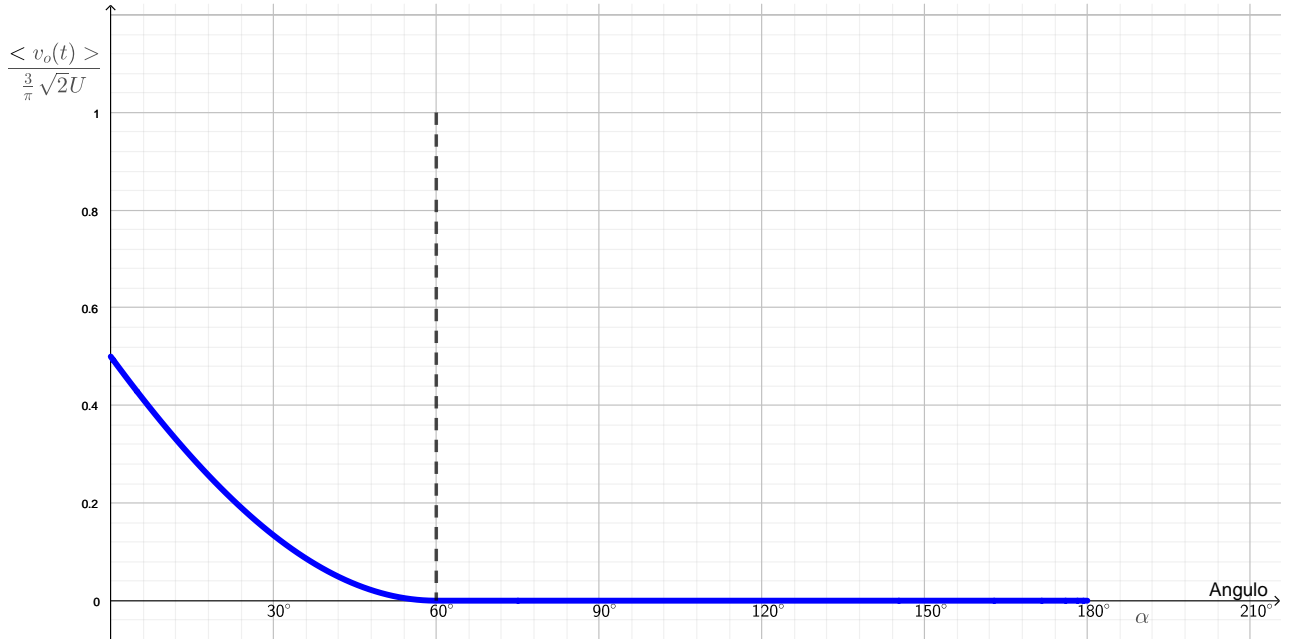


Figura 11: Transferencia normalizada $\frac{\langle v_o(t) \rangle}{\frac{3}{\pi} \sqrt{2} U}$ en función del ángulo de disparo α .

Como $U_c = \cos(\alpha)$, entonces la transferencia $\langle v_o(t) \rangle = f^*(U_c)$ queda

$$\langle v_o(t) \rangle \begin{cases} \frac{3}{\pi} \sqrt{2} U (1 + \cos(\frac{2\pi}{3} + \arccos(U_c))) & \forall U_c \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & \forall U_c \in (-1, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

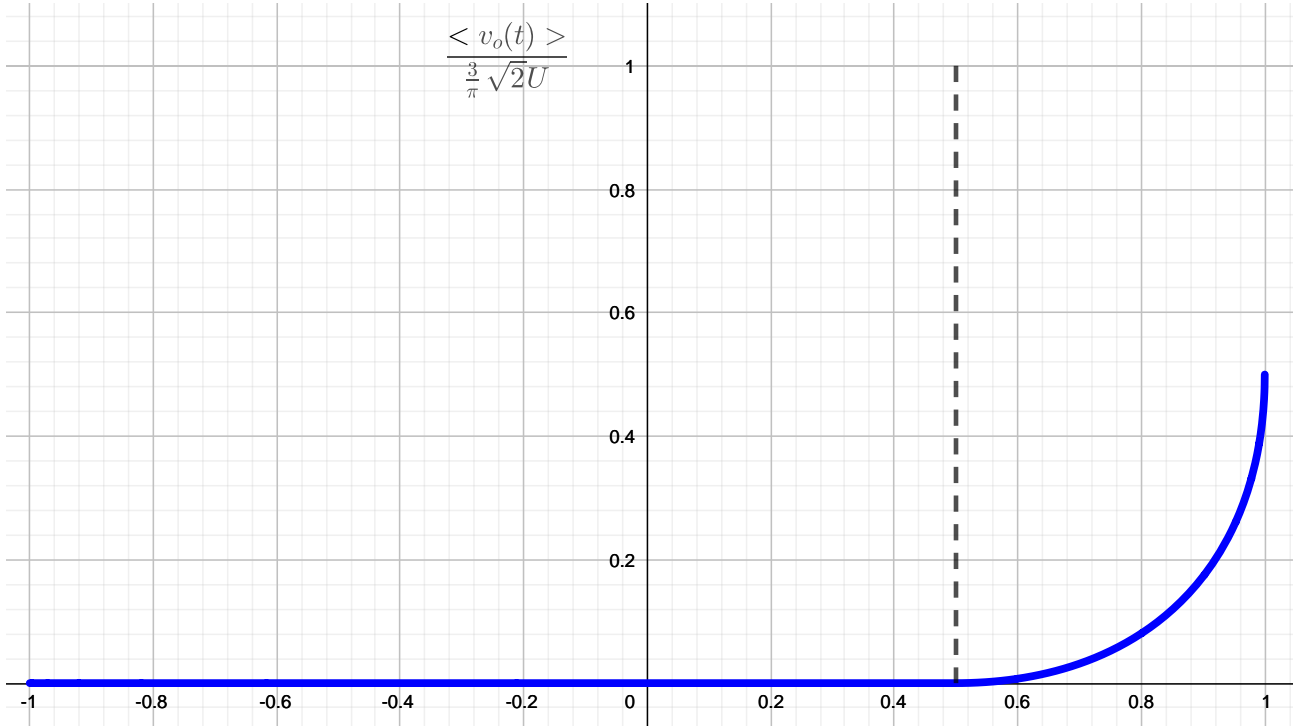


Figura 12: Transferencia normalizada $\frac{\langle v_o(t) \rangle}{\frac{3}{\pi} \sqrt{2} U}$ en función de la tensión de control U_c .

Valores notables:

U_c	$\langle \mathbf{v}_o(\mathbf{t}) \rangle$
1	$\frac{3}{\pi} \sqrt{2} \frac{U}{2}$
$\frac{1}{2}$	0
$-\frac{1}{2}$	0
-1	0

Cuadro 3: Valores notables de U_c para una red trifásica inversa.

- d) Si hay un desbalance en módulo del sistema trifásico, se moverán los instantes de conmutación natural de los tiristores que dependan de dicha fase.

Por ejemplo, en la figura 13 se muestra la tensión trifásica directa si la tensión de fase V_S cae un 20%. Se puede ver que los instantes de conmutación natural de los tiristores T2 y T5 se adelantaron $\arctan\left(\frac{1-0,8}{\sqrt{3}(1+0,8)}\right) = 3.67^\circ$, los de T3 y T6 se atrasaron 3.67° , y los de T1 y T4 no cambiaron.

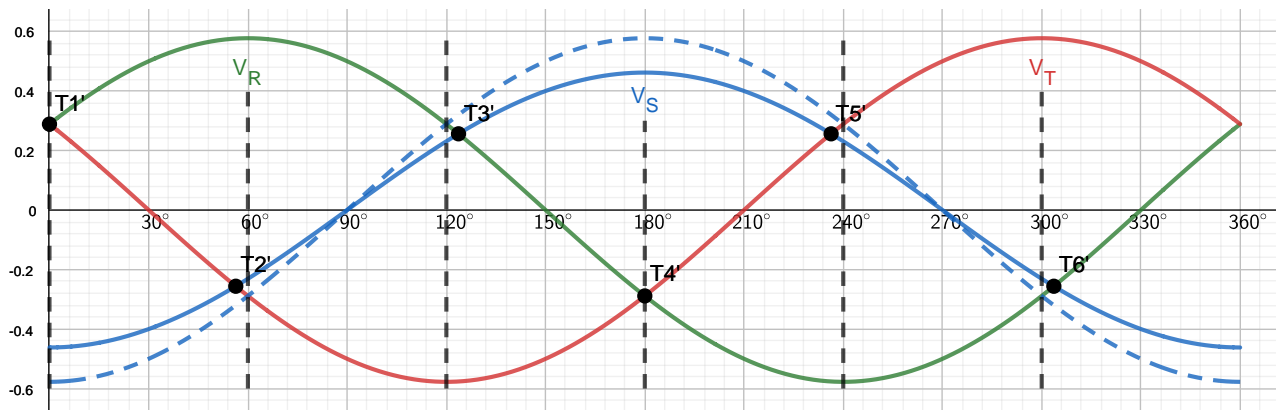


Figura 13: Tensiones de fase e instantes de conmutación natural de los tiristores 1 a 6 para rotación horaria (directo). El eje de las ordenadas está normalizado a $\sqrt{2}U = 1$.

Sin embargo, si se mantiene el control por comando arco-coseno, se seguirá disparando a los tiristores con la respectiva fase, no teniendo en cuenta entonces el desbalance en módulo.

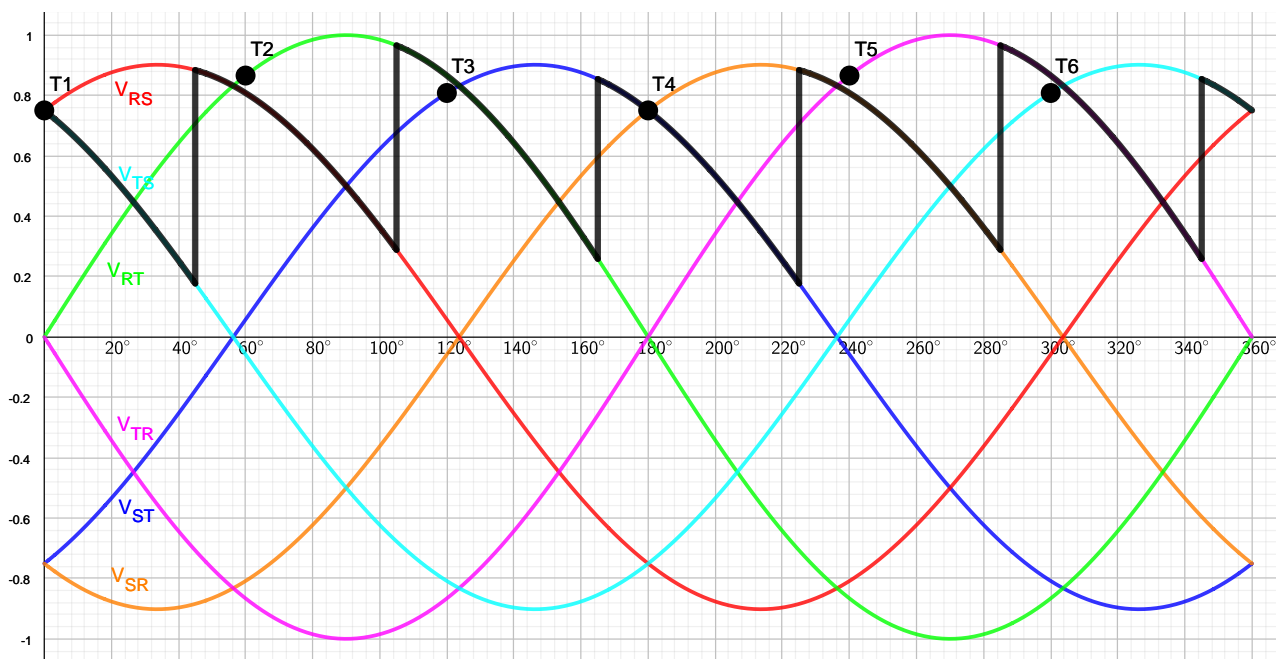


Figura 14: Tensiones compuestas, tensión de salida y tensión media de salida. El eje de las ordenadas está normalizado a $\sqrt{2}U = 1$.

La tensión de salida disminuye debido a la caída de los módulos de las tensiones de línea que incluyen a V_S (es decir V_{RS} , V_{ST} , V_{SR} y V_{TS}), y también al desfase introducido en dichas tensiones de línea.