Sistemas Lineales 1
Fasores

Pablo Monzón

Instituto de Ingeniería Eléctrica (IIE)
Facultad de Ingeniería-Universidad de la República
Uruguay

Primer semestre - 2018

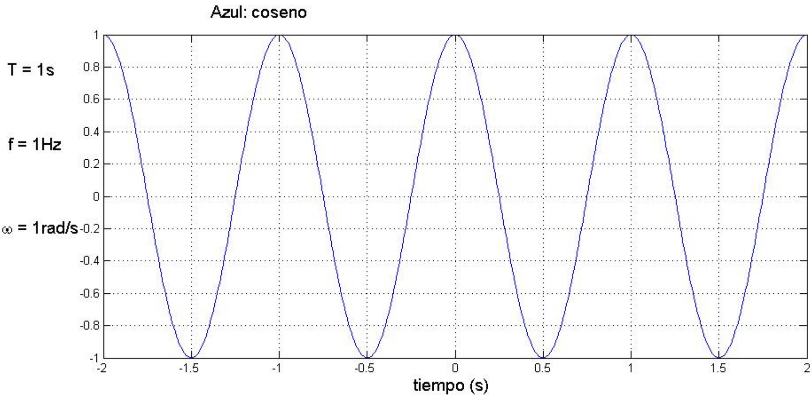
Contenido

Función sinusoidal

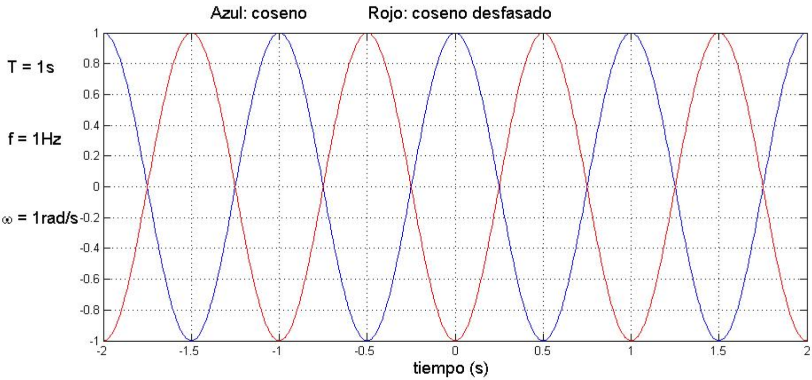
$A\cos(\omega t + \varphi)$

- A es la amplitud de la señal;
- $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, siendo
  - T - periodo de la señal,
  - $f = 1/T$ - frecuencia de la señal,
  - ω - pulsación o frecuencia angular de la señal.
- φ es la fase de la señal.

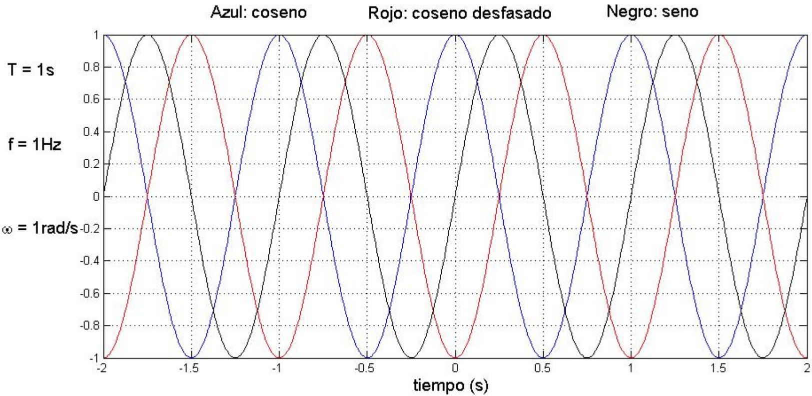
Ejemplos


Azul: coseno
T = 1s
f = 1Hz
ω = 1rad/s
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
tiempo (s)

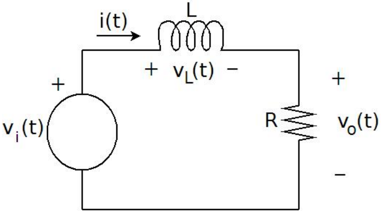
Ejemplos


Azul: coseno
Rojo: coseno desfasado
T = 1s
f = 1Hz
ω = 1rad/s
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
tiempo (s)

Ejemplos


Azul: coseno
Rojo: coseno desfasado
Negro: seno
T = 1s
f = 1Hz
ω = 1rad/s
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
tiempo (s)

Análisis de un circuito $R - L$



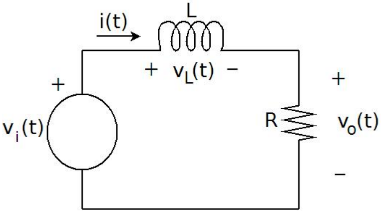
Ley de Kirchoff de mallas

$$v_i(t) = v_L(t) + v_o(t)$$

Leyes de los elementos

$$v_L(t) = L\frac{d}{dt}i(t) \quad , \quad v_o(t) = Ri(t)$$

Ecuaciones generales

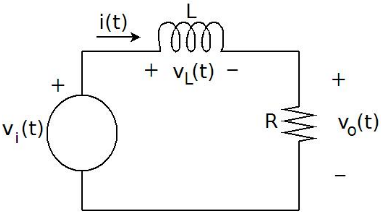


Ecuación de la corriente

$$v_i(t) = L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}i(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}v_i(t)$$

- Es una ecuación diferencial lineal de primer orden.
- La condición inicial es la corriente i_{L_0} por la bobina cuando se inicia el circuito.

Resolvemos la ecuación diferencial

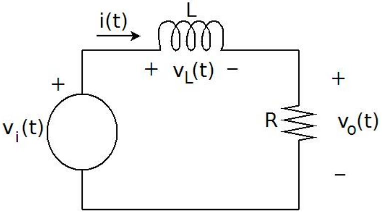


Solución homogénea: $i_H(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, $\tau = \frac{L}{R}$

Comentarios:

- La solución homogénea converge asintóticamente a 0.
- Decimos que es transitoria, ya que se extingue al transcurrir el tiempo.
- El parámetro τ - *constante de tiempo del circuito*- da una idea de durante cuánto tiempo es apreciable la solución transitoria.
- Para poder avanzar, tenemos que trabajar con una entrada conocida.

Entrada sinusoidal: $v_i(t) = E\cos(\omega t + \varphi_v)$



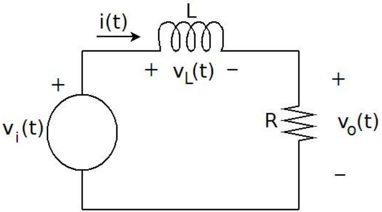
Solución particular (sinusoidal)

$$i_P(t) = I\cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \quad , \quad \varphi_i = \varphi_v - atan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

(derivando y sustituyendo en la ecuación de la corriente; ver Notas del curso).

Entrada sinusoidal: $v_i(t) = E\cos(\omega t + \varphi_v)$



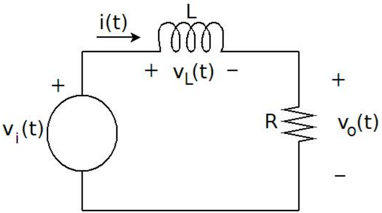
Solución completa

$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \cos\left[\omega t + \varphi_v - atan\left(\frac{L\omega}{R}\right)\right] + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Salida

$$\boxed{v_o(t) = \frac{RE}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \cos\left[\omega t + \varphi_v - atan\left(\frac{L\omega}{R}\right)\right] + RAe^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Entrada sinusoidal: $v_i(t) = E\cos(\omega t + \varphi_v)$



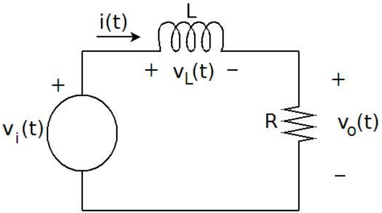
Solución en régimen

$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \cos\left[\omega t + \varphi_v - atan\left(\frac{L\omega}{R}\right)\right]$$

Salida en régimen

$$\boxed{v_o(t) = \frac{RE}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \cos\left[\omega t + \varphi_v - atan\left(\frac{L\omega}{R}\right)\right]}$$

Cambiamos la entrada sinusoidal: $v_i(t) = E\sin(\omega t + \varphi_v)$



Solución en régimen

$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin\left[\omega t + \varphi_v - atan\left(\frac{L\omega}{R}\right)\right]$$

Salida en régimen

$$v_o(t) = \frac{RE}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin\left[\omega t + \varphi_v - atan\left(\frac{L\omega}{R}\right)\right]$$

Combinamos las entradas

$$\begin{array}{ccc} e_1(t) = E\cos(\omega t + \varphi_e) & \Rightarrow & r_1(t) = R\cos(\omega t + \varphi_r) \\ e_2(t) = E\sin(\omega t + \varphi_e) & \Rightarrow & r_2(t) = R\sin(\omega t + \varphi_r) \\ & Linealidad & \\ \alpha.e_1(t) + \beta.e_2(t) & \Rightarrow & \alpha.r_1(t) + \beta.r_2(t) \\ & \forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{R} & \\ & \forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{C} & \end{array}$$

Ponemos $\alpha = 1$ y $\beta = j$:

$$e_1(t) + j.e_2(t) \quad \Rightarrow \quad r_1(t) + j.r_2(t)$$

$$E.e^{j(\omega t + \varphi_e)} \quad \Rightarrow \quad Re^{j(\omega t + \varphi_r)}$$

Comentarios

Si admitimos entradas complejas, un sistema lineal responde así:

- la parte real de la respuesta, es la respuesta a la parte real de la entrada;
- la parte imaginaria de la respuesta, es la respuesta a la parte imaginaria de la entrada.

Vamos a ver que es sencillo hallar la respuesta del sistema a una entrada sinusoidal compleja, lo que será una importante herramienta de análisis.

Procedimiento

- Partimos de una entrada sinusoidal real.
- Armamos una entrada compleja auxiliar (con la entrada original como parte real o imaginaria).
- Hallamos la respuesta a dicha entrada compleja.
- Recuperamos la respuesta a la entrada original (tomando parte real o imaginaria según la decisión original).

Fasor

Definición de fasor

Dada una señal sinusoidal $x(t)$, de amplitud A, pulsación ω y fase φ, llamamos *fasor asociado a* x al **número complejo** X que verifica la identidad

$$x(t) = re\left(Xe^{j\omega t}\right)$$

Ejemplo de cálculo

Para $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, su fasor asociado es $X = Ae^{j\varphi}$ pues

$$A\cos(\omega t + \varphi) = re\left(Ae^{j(\omega t + \varphi)}\right) = re\left(\underbrace{Ae^{j\varphi}}_{fasor} e^{j\omega t}\right)$$

Operaciones con números complejos

Expresión polar y cartesiana

- Un número complejo X puede expresarse en forma polar (módulo y fase) o cartesiana (partes real e imaginaria).
- Para sumar o restar complejos, es útila la forma cartesiana (su suman o restan las partes reales por un lado y las imaginarias por otro).
- Para multiplicar, dividir o tomar raíz cuadrada, es útil la forma polar (se multiplican o dividen los módulos y se suman o restan las fases).
- El pasaje de una a otra expresión es muy sencillo

$$X = A + jB = Me^{j\phi}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} A & = & M\cos(\phi) \\ B & = & M\sin(\phi) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} M & = & \sqrt{A^2+B^2} \\ \phi & = & atan\left(\frac{B}{A}\right) \end{array}\right.$$

Componentes *en fasores*

Resistencia

- La Ley de Ohm nos dice que $v(t) = R.i(t)$ (medidas adecuadamente).
- Consideremos una tensión sinusoidal $v(t) = E\cos(\omega t + \varphi_v)$.
- Consideremos los fasores $\tilde{V} = Ee^{j\varphi_v}$, $\tilde{I} = Ie^{j\varphi_i}$.
- Entonces

$$i(t) = re\left(\tilde{I}e^{j\omega t}\right) = \frac{v(t)}{R} = \frac{re\left(\tilde{V}e^{j\omega t}\right)}{R} \underset{R>0}{=} re\left(\frac{\tilde{V}}{R}e^{j\omega t}\right)$$

- De donde $\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{R}$ o, de otro modo, $\boxed{\tilde{V} = R.\tilde{I}}$ (Ley de Ohm en fasores).

Componentes *en fasores*

Inductancia

- Consideremos los fasores $\tilde{V} = Ee^{j\varphi_v}$, $\tilde{I} = Ie^{j\varphi_i}$.
- Entonces

$$v(t) = re\left(\tilde{V}e^{j\omega t}\right) = L\frac{d}{dt}i(t) = L\frac{d}{dt}re\left(\tilde{I}e^{j\omega t}\right)$$

- La derivada *conmuta* con la toma de la parte real (operaciones lineales):

$$re\left(\tilde{V}e^{j\omega t}\right) = re\left(L\frac{d}{dt}\tilde{I}e^{j\omega t}\right) = re\left(Lj\omega\tilde{I}e^{j\omega t}\right)$$

- De donde $\boxed{\tilde{V} = Lj\omega\tilde{I}}$. Similar a la Ley de Ohm, con constante de proporcionalidad compleja.

Componentes *en fasores*

Condensador

- Consideremos los fasores $\tilde{V} = Ee^{j\varphi_v}$, $\tilde{I} = Ie^{j\varphi_i}$.
- Entonces

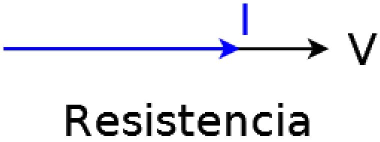
$$i(t) = re\left(\tilde{I}e^{j\omega t}\right) = C\frac{d}{dt}v(t) = C\frac{d}{dt}re\left(\tilde{V}e^{j\omega t}\right)$$

- La derivada *conmuta* con la toma de la parte real:

$$re\left(\tilde{I}e^{j\omega t}\right) = re\left(C\frac{d}{dt}\tilde{V}e^{j\omega t}\right) = re\left(Cj\omega\tilde{V}e^{j\omega t}\right)$$

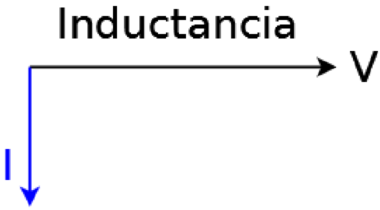
- De donde $\boxed{\tilde{I} = Cj\omega\tilde{V} \Rightarrow \tilde{V} = \frac{1}{Cj\omega}\tilde{I}}$. Similar a la Ley de Ohm.

Representación geométrica de fasores



- Los fasores de tensión y corriente son colineales.
- Decimos que están *en fase*.

Representación geométrica de fasores



- Los fasores de tensión y corriente son perpendiculares.
- Decimos que están *en cuadratura*.
- La corriente está *atrasada* 90^o respecto de la tensión.

Representación geométrica de fasores

- Los fasores de tensión y corriente son perpendiculares.
- Decimos que están *en cuadratura*.
- La corriente está *adelantada* 90^o respecto de la tensión.

Leyes de Kirchoff en fasores

Ley de mallas

- La suma de las caídas de tensión a lo largo de una malla es nula.
- Supongamos que tenemos caídas sinusoidales $v_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$.
- Sabemos que $0 = \sum_{i=1}^{n} v_i(t)$.
- Entonces $0 = \sum_{i=1}^{n} re\left(\tilde{V}_i e^{j\omega t}\right) = re\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{V}_i\right) e^{j\omega t}\right]$
- De donde $0 = \sum_{i=1}^{n} \tilde{V}_i$.
- **La ley de mallas sigue siendo valida en fasores**.

Leyes de Kirchoff en fasores

Ley de nudos

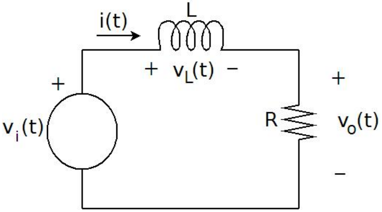
- La suma de las corrientes que llegan a un nudo es nula.
- Supongamos que tenemos corrientes incidentes sinusoidales $i_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$.
- Sabemos que $0 = \sum_{i=1}^{n} i_i(t)$.
- Entonces $0 = \sum_{i=1}^{n} re\left(\tilde{I}_i e^{j\omega t}\right) = re\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{I}_i\right) e^{j\omega t}\right]$
- De donde $0 = \sum_{i=1}^{n} \tilde{I}_i$.
- **La ley de nudos sigue siendo valida en fasores**.

Resumiendo

En fasores

- Las relaciones tensión-corriente de los elementos básicos cumplen una Ley de Ohm con constantes complejas.
- Valen las Leyes de Kirchoff.
- Estamos en un terreno conocido, donde podemos aplicar los métodos de mallas y de nudos para resolver circuitos.
- Un circuito en fasores se aborda de forma idéntica que un circuito puramente resistivo, con la complicación de que hay que trabajar con números complejos.

Circuito equivalente en fasores

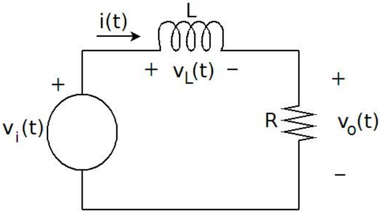


Consideremos un circuito funcionando en régimen sinusoidal.

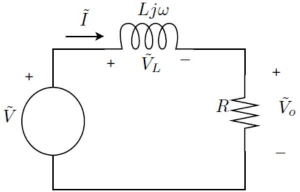
- Mantenemos el dibujo.
- A cada fuente le asociamos el valor de su fasor.
- Asignamos a cada componente el valor de la constante de proporcionalidad entre la tensión y la corriente.

Circuito equivalente en fasores

Circuito original



Circuito en fasores



Impedancias y admitancias complejas

Definición de impedancia

Dada una tensión sinusoidal $v_{AB}(t)$ entre dos terminales A y B, y una corriente sinusoidal $i_{AB}(t)$ fluyendo por ellos, definimos la *impedancia* entre A y B así:

$$Z_{AB} = \frac{\tilde{V}_{AB}}{\tilde{I}_{AB}} = R + jX$$

- Magnitudes medidas igual que en la ley de Ohm.
- Se mide en Ω.
- R es la resistencia y X es la reactancia.

Impedancias y admitancias complejas

Definición de admitancia

Dada una tensión sinusoidal $v_{AB}(t)$ entre dos terminales A y B, y una corriente sinusoidal $i_{AB}(t)$ fluyendo por ellos, definimos la *admitancia* entre A y B así:

$$Y_{AB} = \frac{\tilde{I}_{AB}}{\tilde{V}_{AB}} = \frac{1}{Z_{AB}} = G + jB$$

- Magnitudes medidas igual que en la ley de Ohm.
- Se mide en Ω^{-1} o *mhos*.
- G es la conductancia y B es la susceptancia.

Impedancias y admitancias complejas

Observaciones

Como en fasores valen las leyes de Kirchoff y de Ohm, entonces:

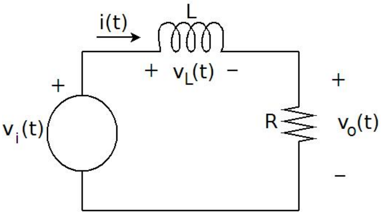
- podemos hablar de impedancia (admitancia) serie, paralelo, vista, de carga, etc.!!!!!
- podemos usar todas las técnicas y trucos que sabemos para circuitos puramente resistivos;
- tenemos que agregar la dependencia de la impedancia o admitancia respecto de la frecuencia;
- lo notaremos así: $Z(j\omega)$;
- puede ser útil graficar el módulo y la fase de $Z(j\omega)$ en función de ω.

Impedancias y admitancias complejas

Observaciones

- El concepto de impedancia sólo tiene sentido en fasores!!! (no en el tiempo).
- Una resistencia tiene impedancia real positiva.
- Una inductancia tiene impedancia imaginaria pura, con reactancia positiva.
- Un condensador tiene impedancia imaginaria pura, con reactancia negativa (susceptancia positiva).
- Por eso decimos que una impedancia $Z(j\omega)$ es de tipo *inductivo* si tiene parte imaginaria positiva, en tanto que es de tipo *capacitivo* si tiene reactancia negativa.

Ejemplo

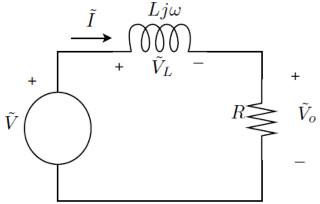


Supongamos que

$$v_i(t) = E\cos(\omega t)$$

Ya vimos el circuito equivalente en fasores.

Ejemplo

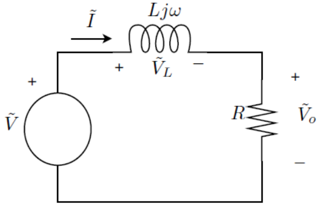


- El fasor de tenión es $\tilde{V} = Ee^{j0}$.
- El fasor de la corriente vale $\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{R+Lj\omega}$.
- La expresión temporal es $i(t) = |\tilde{I}|.\cos\left[\omega t + arg\ \tilde{I}\right]$

$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos\left[\omega t - atan(L\omega/R)\right]$$

- La tensión en R es $\tilde{V}_o = \frac{R}{R+Lj\omega}\tilde{V}$ (divisor de tensión).
- La expresión temporal es $v_o(t) = \frac{ER}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \cos\left[\omega t - atan(L\omega/R)\right]$.

Ejemplo



- La impedancia vista por la fuente es $R + Lj\omega$, de tipo inductivo.
- Para bajas frecuencias, es aproximadamente real ($\approx R$), por lo que no introduce desfasajes entre la tensión de la fuente y la corriente que ésta entrega.
- Para altas frecuencias, es prácticamente imaginaria pura, por lo que la tensión y la corriente están desfasadas casi 90^o.
- Para $\omega = \frac{R}{L}$, la corriente atrasa exactamente -45^o a la tensión.

Función de transferencia en régimen sinusoidal

Transferencia en régimen sinusoidal

- Dado un circuito en régimen sinusoidal, elegimos una entrada sinusoidal genérica y su fasor $E(j\omega)$ y miramos la respuesta en régimen, también sinusoidal, de fasor $R(j\omega)$.
- Definimos la *transferencia en régimen sinusoidal*:

$$H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)}$$

- Es una función de la frecuencia de trabajo.
- Normalmente vamos a obtener un cociente de polinomios en $(j\omega)$.

Función de transferencia en régimen sinusoidal

Transferencia en régimen sinusoidal

- Supongamos una entrada sinusoidal $e(t) = A_e.\cos(\omega_0 t + \varphi_e)$, de fasor asociado $E(j\omega_0) = A_e.e^{j\varphi_e}$.
- La respuesta en régimen va a ser $r(t) = A_r.\cos(\omega_0 t + \varphi_r)$, de fasor asociado $R(j\omega_0) = A_r.e^{j\varphi_r}$.
- Como $H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)}$, entonces

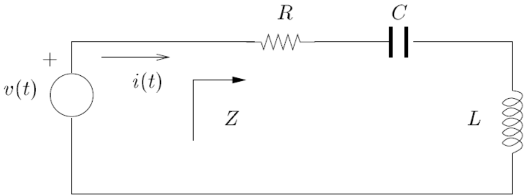
$$R(j\omega) = H(j\omega).E(j\omega) \quad , \forall\omega \Rightarrow R(j\omega_0) = H(j\omega_0).E(j\omega_0)$$

- Entonces

$$\boxed{r(t) = A_e.|H(j\omega_0)|.\cos\left[\omega_0 t + \varphi_e + arg\ H(j\omega_0)\right]}$$

(Una de las fórmulas más importantes del curso!!!!!!)

Ejemplo



- Elegimos como entrada la tensión de la fuente y como salida la corriente que entrega la misma.
- Dado el fasor de entrada $\tilde{V}(j\omega)$, la respuesta es

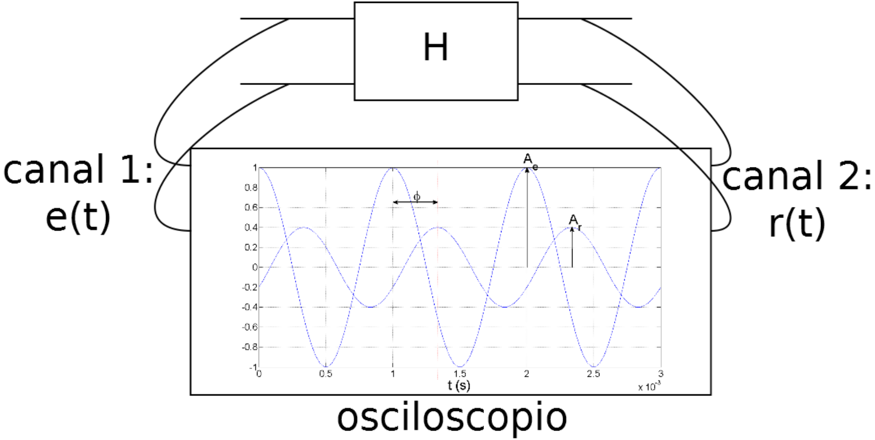
$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{R + \frac{1}{Cj\omega} + Lj\omega} = \frac{C(j\omega)}{1 + RC(j\omega) + LC(j\omega)^2}.\tilde{V}$$

- Entonces $\boxed{H(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{1 + RC(j\omega) + LC(j\omega)^2} = \frac{1}{Z(j\omega)}}$

Relevamiento experimental de una transferencia

- Para circuitos muy complicados, o para *cajas negras* lineales, es posible determinar la transferencia en régimen sinusoidal de forma experimental.
- Para ello, se inyectan entradas sinusoidales de distintas frecuencias y se miden las respectivas respuestas, determinando la relación de amplitud y la diferencia de fase entre entrada y respuesta.
- Para cada frecuencia, esos datos constituyen los respectivos módulo y argumento de H.
- Repitiendo el experimento para una grilla adecuada de frecuencias, se puede relevar H de forma bastante ajustada.
- En base a lo relevado, se puede deducir una expresión analítica para H.

Relevamiento experimental de una transferencia



Potencia instantánea y potencia media

Potencia instantánea

Dada una tensión $v(t)$ y una corriente asociada $i(t)$, medidas con las convenciones de la ley de Ohm, definimos la potencia instantánea como $p(t) = v(t).i(t)$.

Usualmente se mide en watts (W) (HP, BTU/h, etc.).

Potencia media

Si $v(t)$ e $i(t)$ son periódicas, de periodo τ, se define la potencia media como el valor medio de $p(t)$ en un periodo:

$$P = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau p(t)dt$$

Tiene las mismas unidades que la potencia instantánea.

Potencia instantánea y potencia media

Valor eficaz

Dada una señal periódica $x(t)$, de periodo τ, se define su valor eficaz (*effective*):

$$X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} x^2(t)dt}$$

- Tiene las mismas unidades que la señal original.
- Si $x(t)$ fuera una tensión o una corriente, su valor eficaz representa un valor constante que sobre una resistencia de 1Ω, disipa una potencia igual a la potencia media de $x(t)$.

Potencia instantánea y potencia media

Ejemplo: valor eficaz de una sinusoide

Si $v(t) = E\cos(\omega t + \varphi)$, entonces, su valor eficaz vale

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{\tau}\int_0^\tau E^2\cos^2(\omega t + \varphi)dt} = \sqrt{\frac{E^2}{\tau}\int_0^\tau \cos^2(\omega t + \varphi)dt}$$

Sabemos que $\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos(2\omega t)\right]$, de donde

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{E^2}{2\tau}\int_0^\tau \left[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)\right]dt} = \sqrt{\frac{E^2}{2\tau}\int_0^\tau dt}$$

$$\boxed{V_{eff} = \frac{E}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \boxed{v(t) = \sqrt{2}V_{eff}\cos(\omega t + \varphi)}$$

Potencia medida en régimen sinusoidal

Régimen sinusoidal

- Si $v(t) = V\cos(\omega t + \varphi_v)$, $i(t) = I\cos(\omega t + \varphi_i)$.
- La potencia instantánea vale

$$p(t) = v(t).i(t) = VI.\cos(\omega t + \varphi_v).\cos(\omega t + \varphi_i)$$

- Sabemos que $\cos(x).\cos(y) = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$, de donde

$$p(t) = \frac{VI}{2}.\left[\cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i) + \cos(\varphi_v - \varphi_i)\right]$$

- La potencia media vale

$$P = \frac{VI}{2}.\cos(\varphi_v - \varphi_i)$$

Potencia medida en régimen sinusoidal

Régimen sinusoidal

$$P = \frac{VI}{2}.\cos(\varphi_v - \varphi_i)$$

- Observemos que $\varphi_v - \varphi_i = \varphi$ es la diferencia de fase entre los fasores asociados $\tilde{V}$ e $\tilde{I}$.
- También es el argumento de la impedancia que relaciona los fasores de la tensión y la corriente:

$$Z(j\omega) = \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}} = \frac{Ve^{j\varphi_v}}{Ie^{j\varphi_i}} = \frac{V}{I}e^{j\varphi}$$

- Entonces $\boxed{P = \frac{V.I}{2}.\cos(\varphi) = V_{eff}I_{eff}.\cos(\varphi)}$

Potencia medida en régimen sinusoidal

La potencia en función de los fasores

$$P = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} v(t).i(t)dt = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} re\left[\tilde{V}.e^{j\omega t}\right].re\left[\tilde{I}.e^{j\omega t}\right]dt =$$

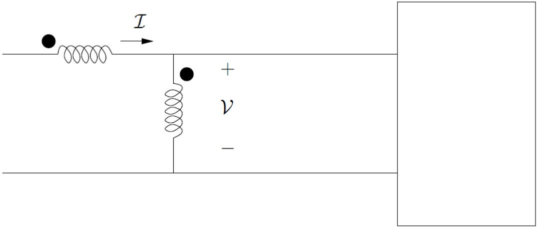
$$= \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\left[\frac{\tilde{V}.e^{j\omega t}+\bar{\tilde{V}}.e^{-j\omega t}}{2}\right].\left[\frac{\tilde{I}.e^{j\omega t}+\bar{\tilde{I}}.e^{-j\omega t}}{2}\right]dt =$$

$$= \frac{1}{4\tau}.re\left[\int_0^{\tau}\left[\tilde{V}.\tilde{I}.e^{j2\omega t}+\bar{\tilde{V}}.\bar{\tilde{I}}.e^{-j2\omega t}+\tilde{V}.\bar{\tilde{I}}+\bar{\tilde{V}}\tilde{I}\right]dt\right] =$$

$$= \frac{1}{4\tau}.re\left[\int_0^{\tau}\tilde{V}.\tilde{I}.e^{j2\omega t}dt+\int_0^{\tau}\bar{\tilde{V}}.\bar{\tilde{I}}.e^{-j2\omega t}dt+\int_0^{\tau}\tilde{V}.\bar{\tilde{I}}dt+\int_0^{\tau}\bar{\tilde{V}}.\tilde{I}dt\right]$$

- Las dos primeras integrales se anulan ($\omega = \frac{2\pi}{\tau}$).
- Obtenemos $\boxed{P = \frac{1}{2}re[\tilde{V}\bar{\tilde{I}}]}$ (para evitar la fracción trabajamos en *fasores eficaces*).

Medición de potencia



Vatímetro

- Instrumento que consta de dos bobinas acopladas.
- Una sensa la tensión de interés.
- La otra la corriente de interés.
- La lectura responde a la respectiva potencia media.

Factor de potencia

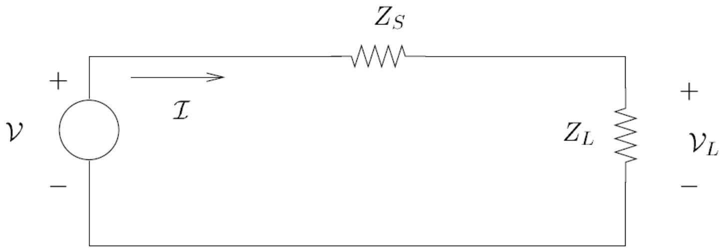
Definición

Dadas una tensión y una corriente sinusoidales, se llama factor de potencia al $\cos(\varphi)$, es decir, al coseno del desfasaje entre los respectivos fasores asociados.

Comentarios

- Dadas la amplitud de tensión y la de la corriente, el factor de potencia establece cuánta potencia se tiene respecto de la máxima posible para dichas amplitudes.
- El factor de potencia es máximo $(= 1)$ cuando los fasores están en fase (impedancia resistiva pura).
- Es mínimo $(= 0)$ cuando los fasores están en cuadratura (impedancia imaginaria pura).

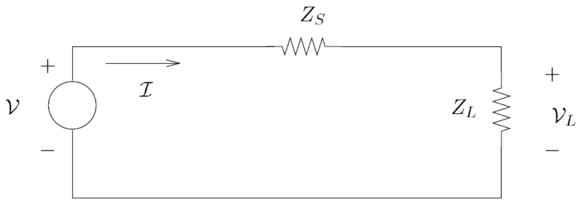
Máxima transferencia de potencia



Problema

Dados $\mathcal{V}$ y Z_S, elegir Z_L de forma de maximizar la potencia media disipada en Z_L.

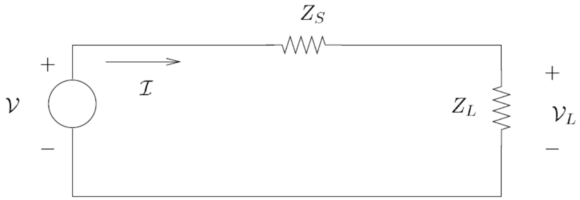
Máxima transferencia de potencia



Calculemos la potencia media en Z_L

- $P = re\left(\mathcal{V}_L.\bar{\mathcal{I}}_L\right)$ (fasores eficaces).
- $V_L = \frac{Z_L\mathcal{V}}{Z_S+Z_L}$, $\mathcal{I}_L = \mathcal{I} = \frac{\mathcal{V}}{Z_S+Z_L} \Rightarrow P = re\left(\frac{Z_L\mathcal{V}}{Z_S+Z_L}.\overline{\left(\frac{\mathcal{V}}{Z_S+Z_L}\right)}\right)$.
- $\boxed{P = \frac{|\mathcal{V}|^2}{|Z_S+Z_L|^2}.re\left(Z_L\right)}$.

Máxima transferencia de potencia



Pongamos $Z_S = R_S + jX_S$, $Z_L = R_L + jX_L$

- $P = \frac{|\mathcal{V}|^2 R_L}{(R_S+R_L)^2+(X_S+X_L)^2}$.
- Debemos maximizar la expresión anterior como función de R_L y X_L.
- Con la restricción de que R_L es no negativa (y X_L real cualquiera).
- Anulando el gradiente (o de otras formas), obtenemos

$$\boxed{R_L = R_S} \;,\; \boxed{X_L = -X_S} \;\Rightarrow\; \boxed{Z_L = \bar{Z}_S}$$

(hacerlo como ejercicio).

Consideraciones sobre la potencia media

- La potencia media está asociada al calor de una estufa, el movimiento de un motor, la intensidad de una luz, etc.
- Por eso también se la llama activa.
- Para una cierta amplitud de tensión y corriente, la potencia media varía según el factor de potencia.
- La potencia activa es máxima para una carga puramente resistiva.
- En el caso extremo de una carga puramente inductiva o capacitiva, la potencia media es nula.
- En ese caso, la potencia activa resulta muy diferente de la máxima potencia que puede entregar la fuente.
- Eso no significa que la fuente de tensión no haga nada.
- En los hechos, lo que termina haciendo la fuente depende de la carga que se le conecte.

Potencia aparente

Potencia aparente y vector volt-ampere

- Para una tensión y una corriente sinusoidales, se define su potencia aparente así:

$$S = \tilde{V}.\bar{\tilde{I}}$$

  siendo $\tilde{V}$ e $\tilde{I}$ los fasores medidos en valores eficaces.
- Se mide en *volt-ampere*.
- Es una magnitud compleja (vector volt-ampere).
- A veces se la confunde con su módulo.
- Éste indica la máxima potencia activa que se puede obtener dados los módulos de $\tilde{V}$ e $\tilde{I}$.
- Observemos que $P = re(S)$.

Potencia aparente

Ejemplo

- Consideremos un generador sinusoidal de $220V$, $50Hz$ y $1kVA$ de potencia aparente.
- Significa que para la tensión nominal de trabajo, puede entregar hasta aproximadamente $5A$.
- Si alimenta una carga resistiva pura, podrá entregar hasta $1kW$ de potencia activa, que se corresponde con los $5A$ anteriores.
- Si alimenta una carga con factor de potencia $0{,}5$ inductivo, entonces la potencia activa máxima entregada será de $500W$.
- Para entregar $1kW$, debería dar del orden de $10A$, lo que duplicaría la corriente máxima que maneja el generador y cuadruplicaría las pérdidas por calentamiento en los conductores.

Potencia reactiva

Definición

Sean una tensión y una corriente sinusoidales, de fasores respectivos $\tilde{V}$ e $\tilde{I}$, en valores eficaces, con desfasaje respectivo φ (medido desde la tensión).
Se define su potencia reactiva como sigue:

$$Q = im\left(\tilde{V}.\bar{\tilde{I}}\right) = |\tilde{V}|.|\tilde{I}|.\sin(\varphi)$$

- Se cumple que $S = P + jQ$ (triángulo de potencias).
- Es un concepto inicialmente medio raro, al que hay que acostumbrarse!!!

Potencia reactiva de las componentes básicas

Resistencia

El cálculo directo da $\boxed{Q = 0}$ pues hay desfasaje nulo entre la tensión y la corriente.

Potencia reactiva de las componentes básicas

Inductancia $\boxed{Q > 0}$

$$Q = im\left(\tilde{V}.\bar{\tilde{I}}\right) = im\left(\tilde{V}.\overline{\left(\frac{\tilde{V}}{Lj\omega}\right)}\right) = |\tilde{V}|^2.im\left(\frac{1}{-Lj\omega}\right) = \frac{|\tilde{V}|^2}{L\omega}$$

(*consume* reactiva).

Condensador $\boxed{Q < 0}$

$$Q = im\left(\tilde{V}.\bar{\tilde{I}}\right) = im\left(\tilde{V}.\overline{\left(\tilde{V}Cj\omega\right)}\right) = |\tilde{V}|^2.im\left(-Cj\omega\right) = -|\tilde{V}|^2C\omega$$

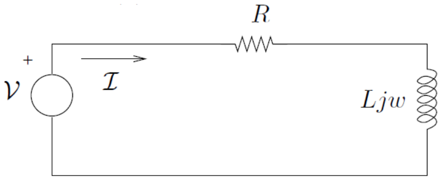
(*entrega* reactiva).

Potencia reactiva

Compensación de reactiva

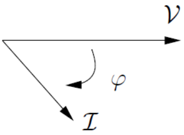
- Desde el punto de vista de la fuente, lo ideal es un factor de potencia unitario.
- Esto implica que la fuente vea una impedancia de carga resistiva pura.
- La mayoría de las cargas, sobre todo industriales, son de tipo inductivo, sobre todo por la presencia de motores.
- Es posible colocar condensadores que *entreguen* la reactiva consumida por la parte inductiva de la impedancia de carga.
- De esta manera, la fuente de tensión (la UTE) no tiene que entregar reactiva y se reducen las pérdidas en conductores!!!
- Normativa: se exige un factor de potencia mínimo, superior a $0{,}92$ (inductivo).

Compensación de potencia reactiva

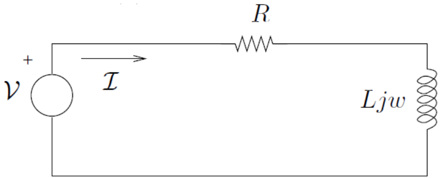


Ejemplo de compensación de reactiva

- Supongamos un sistema formado por una fuente ideal (que representa a la UTE) y una carga inductiva $Z_L = R + Lj\omega$ (que representa a una fábrica).
- La corriente que entrega la fuente estará *retrasada* respecto de la tensión.



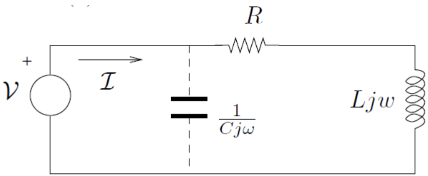
Compensación de potencia reactiva



Ejemplo de compensación de reactiva

- Para compensar la reactiva entregada por la fuente, debemos lograr que los fasores de tensión y corriente estén en fase.
- Además, se pretende no alterar la potencia activa consumida por la carga, por lo que no debe alterarse su tensión en bornes.

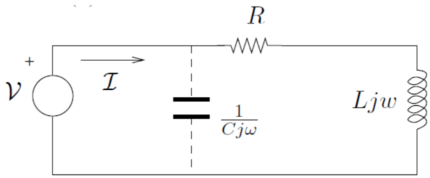
Compensación de potencia reactiva



Ejemplo de compensación de reactiva

- Solución: colocar un condensador en paralelo con la carga.
- No requiere *abrir* la instalación eléctrica existente.
- Si falla el condensador, la carga sigue funcionando.

Compensación de potencia reactiva



Ejemplo de compensación de reactiva

- El cálculo del condensador da $C = \frac{L}{R^2+(L\omega)^2}$.
- Se puede hacer igualando la reactiva de la carga con la opuesta de la reactiva del condensador.
- También se puede llegar imponiendo que la impedancia total que ve la fuente sea resistiva pura.
- En la figura, la corriente y la tensión de la fuente quedan en fase, luego de la compensación.

Potencia compleja en una impedancia con modelo arbitrario

$S = \tilde{V}.\bar{\tilde{I}}$

- Muchas veces tenemos datos de consumo de una carga Z, pero no sabemos cuál es dicha carga, por lo que debemos modelarla.
- Tenemos dos posibilidades: modelo serie $Z = R_S + jX_S$ y modelo paralelo $Z = R_P || jX_P$.
- Verificar que es relativamente sencillo pasar de un modelo a otro (hacerlo!!!)
- Si usamos el modelo serie, entonces

$$S = \tilde{V}.\bar{\tilde{I}} = Z\tilde{I}\bar{\tilde{I}} = Z|\tilde{I}|^2 = \underbrace{|\tilde{I}|^2.R_S}_{P} + j\underbrace{|\tilde{I}|^2.X_S}_{Q}$$

- Si conocemos la corriente, conviene un modelo serie de la carga.

Potencia compleja en una impedancia con modelo arbitrario

$S = \tilde{V}.\bar{\tilde{I}}$

- Si usamos el modelo serie y conocemos la tensión:

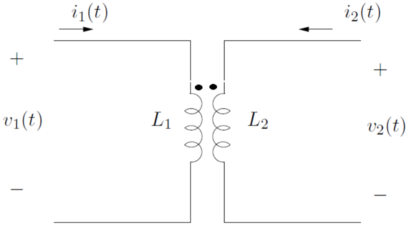
$$S = \tilde{V}.\bar{\tilde{I}} = \tilde{V}\overline{\left[\frac{\tilde{V}}{Z}\right]} = \frac{|\tilde{V}|^2}{\bar{Z}} = \frac{|\tilde{V}|^2}{|Z|^2}.Z = \underbrace{\frac{|\tilde{V}|^2}{|Z|^2}.R_S}_{P} + j\underbrace{\frac{|\tilde{V}|^2}{|Z|^2}.X_S}_{Q}$$

- Si usamos el modelo paralelo, la tensión $\tilde{V}$ es la que ven tanto la parte real como la imaginaria, por lo que

$$S = \underbrace{\frac{|\tilde{V}|^2}{R_P}}_{P} + j\underbrace{\frac{|\tilde{V}|^2}{X_P}}_{Q}$$

- Si conocemos la tensión, conviene un modelo paralelo.

Transformadores

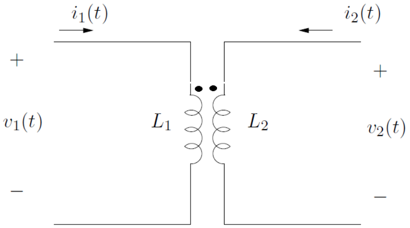


Transformador simple

- Es el modelo que ya vimos.
- Se describe por la tensión y corriente del primario y del secundario, y por los puntos que indican el signo de la mutua.
- Con la convención de signos de la figura, las ecuaciones son:

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Transformadores



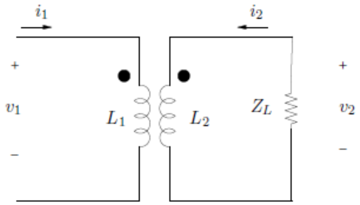
Coeficiente de acoplamiento

- Es el número $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$.
- Se cumple que $0 \leq k \leq 1$.
- $k = 0$ indica que no hay acoplamiento.
- $k = 1$ es el caso de máximo acoplamiento. Decimos en ese caso que el transformador es *perfecto*.

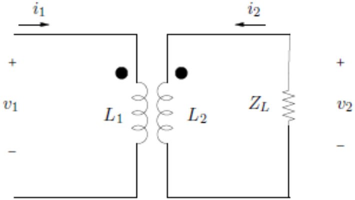
Transformadores

Ganancias en tensión y en corriente

- Normalmente actuamos del lado del primario y vemos qué pasa del lado del secundario.
- Analicemos el circuito en régimen sinusoidal.
- Pasemos a fasores y conectemos una impedancia de carga Z_L en el secundario.



Transformadores



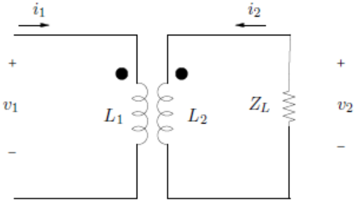
Ganancias en tensión y en corriente

- Las ecuaciones en fasores son:

$$\begin{cases} \tilde{V}_1 = L_1 j\omega \tilde{I}_1 + M j\omega \tilde{I}_2 \\ \tilde{V}_2 = L_2 j\omega \tilde{I}_1 + M j\omega \tilde{I}_2 \end{cases}$$

- La malla del secundario nos dice que $\tilde{V}_2 = -Z_L \tilde{I}_2$ (reflexionar sobre el signo de menos).
- Podemos hallar las ganancias en tensión y corriente.

Transformadores



Ganancias en tensión y en corriente

$$\frac{\tilde{I}_2}{\tilde{I}_1} = -\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\left[\frac{1}{1+\frac{Z_L}{L_2 j\omega}}\right] \quad , \quad \frac{\tilde{V}_2}{\tilde{V}_1} = \frac{Z_L.Mj\omega}{[L_1L_2 - M^2](j\omega)^2 + Z_L.L_1 j\omega}$$

Transformadores

Transformador perfecto

- Veamos cómo se simplifican las ecuaciones del trafo para el caso $k = 1$ ($M = \sqrt{L_1 L_2}$).

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v_1 & = & \sqrt{L_1}\left(\sqrt{L1}\frac{di_1}{dt} + \sqrt{L_2}\frac{di_2}{dt}\right) \\ v_2 & = & \sqrt{L_2}\left(\sqrt{L_2}\frac{di_2}{dt} + \sqrt{L_1}\frac{di_1}{dt}\right) \end{array} \right. \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

  siendo n_1 y n_2 las vueltas de los bobinados del primario y secundario respectivamente.
- La expresión en fasores de la diapositiva anterior lleva al mismo resultado.
- Resumiendo, el tranformador perfecto tiene una ganancia en tensión igual al cociente de las vueltas de los bobinados.

Transformadores

Transformador perfecto

- En corriente, la situación es similar al transformador simple

$$\frac{\tilde{I}_2}{\tilde{I}_1} = -\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\left[\frac{1}{1+\frac{Z_L}{L_2 j\omega}}\right] = -\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\left[\frac{1}{1+\frac{Z_L}{L_2 j\omega}}\right]$$

- Podemos ver cómo se desde el primario la impedancia Z_L del secundario:

$$Z_v = \frac{\tilde{V}_1}{\tilde{I}_1} = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2}{1+\frac{Z_L}{L_2 j\omega}} Z_L$$

Transformadores

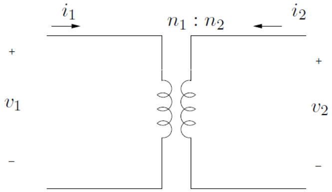
Transformador ideal

- Una especie de *pasaje al límite* nos permite simplificar aún más las ecuaciones del transformador perfecto.
- Observemos que si $|Z_L| \ll L_2\omega$, entonces

$$1 + \frac{Z_L}{L_2 j\omega} \approx 1$$

  y tanto la ganancia en corriente como la forma en que una impedancia pasa el primario dependen solamente de la relación de vueltas.
- La idea básica es hacer tender L_2 a infinito, manteniendo constante el cociente $\frac{L_1}{L_2}$.

Transformadores



Transformador ideal

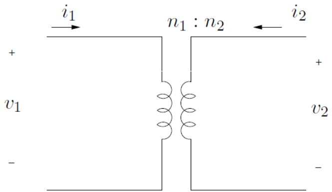
- Se define por sus ganancias en tensión y corriente:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_2}{n_1} \qquad ó \qquad \frac{v_2}{n_2} = \frac{v_1}{n_1}$$

$$\frac{i_2}{i_1} = -\frac{n_1}{n_2} \qquad ó \qquad n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0 \quad (supernudo)$$

- Es lo mismo en el tiempo o en fasores.

Transformadores

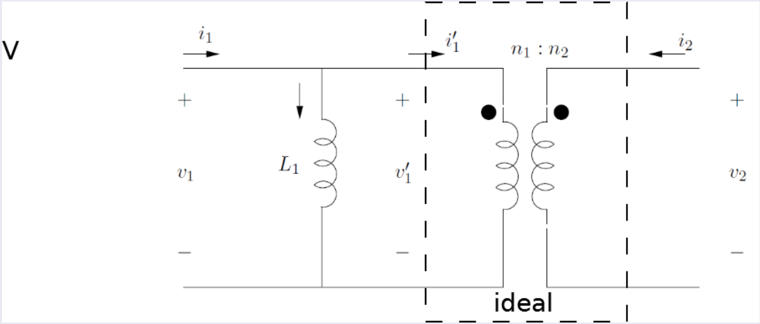


Transferencia de potencia en el trafo ideal

- La potencia inyectada en el primario es $p_1(t) = v_1(t).i_1(t)$.
- La potencia consumida en el secundario es $p_2(t) = v_2(t).[-i_2(t)]$.
- Entonces, $p_1 - p_2 = v_1 i_1 + v_2 i_2 = v_1 i_1 + \left(v_1 \frac{n_2}{n_1}\right)\left(-i_1 \frac{n_1}{n_2}\right) = 0$.
- El transformador es ideal en tanto transfiere al secundario toda la potencia que recibe el primario (o viceversa).

Transformadores

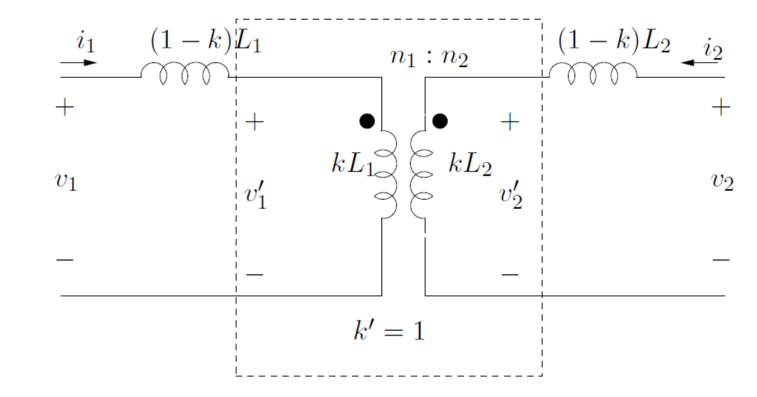
Modelo del trafo perfecto basado en un trafo ideal.



- Verificar que *desde afuera*, valen las ecuaciones de un trafo ideal.
- Esencialmente, se complementa el trafo ideal con componentes que representan ni idealidades.
- Agregando resistencias, se pueden modelar también las pérdidas por calentamiento.

Transformadores

Modelo del trafo simple basado en un trafo perfecto.



Transformadores

Modelo del trafo simple basado en un trafo ideal.