Capítulo 11

El teorema de Green

El teorema de Green relaciona la integral de línea de un campo vectorial sobre una curva plana con una integral doble sobre el recinto que encierra la curva. Este tipo de teoremas resulta muy útil porque, dados un campo vectorial y una curva cerrada simple sobre la cual hay que integrarlo, podemos elegir la posibilidad más simple entre integrar el campo directamente sobre la curva o bien integrar la diferencia de sus derivadas parciales cruzadas sobre en recinto que delimita la curva. Por otro lado, la relación así establecida entre la integral de línea sobre una curva y la integral doble sobre la región interior a ésta permite a veces obtener información sobre una función o su integral en un recinto a partir del comportamiento de la función sobre la frontera de dicho recinto. Los ejemplos y ejercicios de este capítulo ilustrarán las diversas posibilidades y aplicaciones de este tipo de resultados, que generalizaremos a integrales sobre superficies en $\mathbb{R}^3$ en los siguientes capítulos.

Antes de enunciar el teorema de Green convendría precisar qué entendemos por una curva cerrada simple *orientada positivamente*. Sabemos ya que toda curva simple tiene dos posibles orientaciones, y que éstas son invariantes por reparametrizaciones cuyas funciones de cambio de variables tiene derivada positiva. Ahora bien, ¿cómo distinguir entre una y otra orientación? ¿Qué hacer para privilegiar y reconocer una de las dos? Hay varios procedimientos para conseguir esto. Quizá el más intuitivo sea el siguiente, que presenta el concepto de *normal unitaria exterior* a una curva.

Si C es una curva cerrada simple regular a trozos en $\mathbb{R}^2$, parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, el *vector normal unitario exterior* a C se define por

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}\big(y'(t), -x'(t)\big).$$

Nótese que N es ortogonal al vector tangente o velocidad de la curva, $V(t) = (x'(t), y'(t))$. Consideremos estos vectores sumergidos en $\mathbb{R}^3$ (con coordenada $z = 0$). Diremos que C está orientada positivamente si el producto vectorial $N \times V$ (que tiene la dirección del eje z en este caso) tiene coordenada z positiva (es decir, $N \times V$ apunta hacia arriba) para cada t. Esta definición corresponde intuitivamente a decir que C se recorre en el sentido contrario al de las agujas del reloj, o bien que si recorremos C con la orientación positiva entonces N apunta hacia afuera de la región interior a C, y que dicha región interior queda siempre a mano izquierda según se va recorriendo C.

Otra posibilidad para definir la orientación de una curva cerrada simple sería utilizar el número de giros (the winding number); ver el problema 11.17.

Diremos que una curva cerrada simple $C \subset \mathbb{R}^2$ es *regular a trozos* si se puede parametrizar mediante un camino γ que a su vez puede escribirse como concatenación $\gamma_1 * ... * \gamma_k$ de una cantidad finita de caminos $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{R}^2$ cada uno de los cuales es de clase C^1 y satisface que $\gamma_j'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a_j, b_j]$ (en particular, γ podrá dejar de ser diferenciable en una cantidad finita de puntos, pero incluso en estos tendrá derivadas laterales). Para esta clase de curvas cerradas simples enunciaremos y demostraremos el teorema de Green.

Teorema 11.1 (de Green) *Sea C una curva cerrada simple regular a trozos, positivamente orientada, en el plano $\mathbb{R}^2$, y sea D la unión de la región interior a C con la propia curva C. Sea $F = (P, Q) : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1. Entonces se tiene que*

$$\int_C P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy.$$

Antes de dar una demostración de este importante teorema, veamos algunos ejemplos y aplicaciones del mismo.

Ejemplo 11.2 Integrar el campo $F(x, y) = (x, xy)$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ recorrida en sentido positivo.

Ejemplo 11.3 Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$ al mover una partícula a lo largo de la elipse $4x^2 + y^2 = 4$.

Ejemplo 11.4 Hallar el valor de la integral

$$\int_C (5 - xy - y^2) dx - (2xy - x^2) dy,$$

donde C es el borde del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

Una aplicación muy importante del teorema de Green es el cálculo de áreas de recintos delimitados por curvas cerradas simples mediante una integral de línea sobre el borde de dichas curvas. Si tenemos un recinto D en el plano cuya frontera es una curva cerrada simple $C = \partial D$ y queremos calcular su área, nos basta hallar un campo vectorial (P, Q) tal que $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 1$ y aplicar entonces la fórmula de Green para expresar el área de D como la integral de línea de (P, Q) sobre su borde C. Por ejemplo, podemos tomar $P = -y/2$, $Q = x/2$, de modo que

$$a(D) = \int_D 1dxdy = \int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx.$$

Fórmulas análogas pueden deducirse poniendo $(P, Q) = (-y, 0)$, o bien $(P, Q) = (0, x)$. Obtenemos así el siguiente resultado

Corolario 11.5 *Sea C una curva cerrada simple regular a trozos, y sea D la región interior a C. Entonces su área es*

$$a(D) = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx = -\int_C ydx = \int_C xdy.$$

Ejemplo 11.6 Hallar el área de la región encerrada por la hipocicloide (astroide) de ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Demostración del teorema de Green

Tenemos que probar la siguiente igualdad

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy. \qquad (*)$$

A tal fin, observemos que la validez de $(*)$ para todos los campos $F = (P, Q)$ de clase C^1 sobre D equivale a la de las dos fórmulas siguientes

$$-\int_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_{\partial D} Pdx \qquad (11.1)$$

$$\int_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \int_{\partial D} Qdy, \qquad (11.2)$$

también para todos los campos $F = (P, Q)$ de clase C^1 en D. En efecto, si estas fórmulas son válidas, obtenemos $(*)$ sin más que sumarlas. Recíprocamente, si $(*)$ es cierta podemos obtener 11.1 tomando $Q = 0$ en $(*)$, y análogamente 11.2, tomando $P = 0$ en $(*)$.

Paso 1. La primera parte de la demostración del teorema de Green consiste en probar 11.1 para una clase especial de recinto D, que denominaremos recinto de tipo I; un tal recinto será el limitado por las gráficas de dos funciones $y = f(x)$, $y = g(x)$, con $f \leq g$. Es decir, supondremos en primer lugar que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

donde f y g son funciones reales de clase C^1 a trozos. Este recinto D está limitado por una curva cerrada simple $C = \partial D$ regular a trozos que puede expresarse como concatenación de cuatro caminos regulares a trozos:

$$C = C_1 + C_2 - C_3 - C_4,$$

(como es costumbre, los signos negativos que preceden a un camino denotan que se recorre el camino en sentido opuesto al especificado); aquí, C_1 está parametrizado por $\gamma_1(t) = (t, f(t))$, $a \leq t \leq b$; C_2 lo está por $\gamma_2(t) = (b, t)$, con $f(b) \leq t \leq g(b)$; C_3 es $\gamma_3(t) = (t, g(t))$, $a \leq t \leq b$; y C_4 viene dado por $\gamma_4(t) = (a, t)$, $f(a) \leq t \leq g(a)$. Nótese que, a lo largo de C_2 y de C_4, $x = x(t)$ es constante, luego $dx = 0$ sobre estos caminos, y las correspondientes integrales de línea se anularán, mientras que sobre los restantes caminos es $dx = 1$. Entonces se tiene que

$$\int_{\partial D} P dx = \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx - \int_{C_3} P dx - \int_{C_4} P dx =$$
$$\int_{C_1} P dx - \int_{C_3} P dx = \int_a^b P(t, f(t)) dt - \int_a^b P(t, g(t)) dt;$$

y por otra parte, aplicando el teorema de Fubini y el teorema fundamental del cálculo,

$$-\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\int_a^b \Big[\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy\Big] dx =$$
$$-\int_a^b \big[P(x, g(x)) - P(x, f(x))\big] dx = \int_a^b P(t, f(t)) dt - \int_a^b P(t, g(t)) dt.$$

Combinando las igualdades anteriores obtenemos 11.1.

Paso 2. Ahora probaremos 11.2 para otra clase especial de recinto D, que denominaremos recinto de tipo II, el limitado por las gráficas de dos funciones $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$, con $\varphi \leq \psi$. Es decir, ahora tenemos que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\},$$

con φ, ψ funciones reales de clase C^1 a trozos. Como antes, D está limitado por una curva cerrada simple $C = \partial D$ regular a trozos que puede expresarse como concatenación de cuatro caminos regulares a trozos:

$$C = -C_1 + C_2 + C_3 - C_4,$$

donde C_1 está parametrizado por $\gamma_1(t) = (\varphi(t), t)$, $c \leq t \leq d$; C_2 es $\gamma_2(t) = (t, c)$, con $\varphi(c) \leq t \leq \psi(c)$; C_3 es $\gamma_3(t) = (\psi(t), t)$, $c \leq t \leq d$; y C_4 es $\gamma_4(t) = (t, d)$, con $\varphi(d) \leq t \leq \psi(d)$. A lo largo de C_2 y de C_4, $y = y(t)$ es constante, luego $dy = 0$ sobre estos caminos, y las correspondientes integrales de línea son cero; para C_1 y C_3 se tiene $dy = 1$. Entonces,

$$\int_{\partial D} Qdy = -\int_{C_1} Qdy + \int_{C_2} Qdy + \int_{C_3} Qdy - \int_{C_4} Qdy =$$
$$-\int_{C_1} Qdy + \int_{C_3} Qdy = -\int_c^d Q(\varphi(t), t)dt + \int_c^d Q(\psi(t), t)dt,$$

y por otro lado,

$$\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_c^d \big[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\big] dy =$$
$$\int_c^d \big[Q(\psi(y), y) - Q((\varphi(y); y)\big] dy = \int_c^d Q(\psi(t), t)dt - \int_c^d Q(\varphi(t), t)dt;$$

luego, juntando estas igualdades, obtenemos 11.2.

Paso 3. De acuerdo con la observación que hemos hecho antes y con lo probado en los pasos 1 y 2, la fórmula de Green $(*)$ es válida para toda región D que sea a la vez de tipo I y de tipo II. Todos los círculos, los rectángulos y los triángulos constituyen ejemplos de regiones que son de tipo I y II simultáneamente. Por tanto, el teorema de Green es válido para todos estos tipos de curvas. También podría probarse, utilizando el teorema del cambio de variables, que la igualdad $(*)$ es cierta para cualquier región D que sea difeomorfa con un círculo, un rectángulo o un triángulo (ejercicio 11.12).

Paso 4. El siguiente paso consiste en establecer la validez de $(*)$ para toda región D que pueda descomponerse como unión finita de regiones simultáneamente de tipo I y II. Más precisamente, se prueba $(*)$ para todo recinto $D \subset \mathbb{R}^2$ de la forma

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i,$$

donde todos los D_i son regiones de tipo I y II simultáneamente, con interiores disjuntos dos a dos, y cuyos bordes, $C_i = \partial D_i$, están positivamente orientados, y de forma que se cumplen:

- si una curva C_i tiene una parte en común con otro camino C_j entonces esa parte no es común a ningún otro C_k con $k \neq i, j$;
- si C_i tiene un trozo en común con C_j entonces C_i recorre ese trozo común en sentido contrario al que lo hace C_j; y
- si C_i tiene un trozo en común con $C = \partial D$ entonces ambos caminos recorren dicho trozo en el mismo sentido

(hágase un dibujo aquí).

Podemos aplicar la fórmula $(*)$ a cada región D_i y sumar todas las igualdades correspondientes para obtener que

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \sum_{i=1}^{n} \int_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial D_i} Pdx + Qdy.$$

Pero en esta suma de integrales de línea, las integrales sobre $C_i = \partial D_i$ pueden descomponerse a su vez en sumas finitas de integrales sobre curvas simples de dos tipos: o bien son trozos del camino C_i comunes a algún otro de los C_j, o bien son partes de $C = \partial D$. La suma total de todas las integrales sobre caminos del primero de estos tipos es igual a cero ya que, al integrar y sumar, cada una de estas curvas se recorre exactamente dos veces, y con orientaciones opuestas, de modo que la suma de las dos integrales que se hacen sobre cada camino del primer tipo es cero. Por otro lado, la suma de todas las integrales sobre los caminos del segundo tipo es igual a la integral del campo (P, Q) sobre C, ya que C puede expresarse como concatenación de todos los caminos del segundo tipo. Por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial D_i} Pdx + Qdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy,$$

lo que combinado con las igualdades anteriores nos permite concluir que

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy,$$

para todo recinto que pueda romperse en una cantidad finita de recintos de tipo I y II simultáneamente. En particular se obtiene que $(*)$ es válida para toda curva cerrada simple E que sea *poligonal* (a saber, concatenación finita de segmentos de recta), ya que una tal curva siempre puede *triangularse*, es decir expresarse como una unión finita

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} T_i,$$

donde los T_i son triángulos (y por tanto regiones de tipo I y II simultáneamente) orientados de modo que si T_i y T_j tienen un lado común entonces T_i recorre este lado en sentido contrario a como lo hace T_j (hágase aquí otro dibujo).

Paso 5. La última parte de la prueba del teorema de Green consiste en aproximar la curva dada C por una curva cerrada simple poligonal $\mathcal{P}$ de modo que la región $\mathcal{D}$ interior a $\mathcal{P}$ queda dentro del dominio del campo $F = (P, Q)$ y cuyo área, $a(\mathcal{D})$, es también una buena aproximación del área de la región interior a C, es decir $a(D)$. Se aplica entonces el teorema de Green establecido en el paso anterior para curvas cerradas simples poligonales y se concluye que $(*)$ es aproximadamente válida para D, más o menos un cierto error ε que a continuación haremos tender a cero, obteniendo así $(*)$ en toda su generalidad el enunciado del teorema 11.1. Esta última parte de la demostración, que detallamos a continuación, es bastante pesada técnicamente y puede muy bien omitirse en una primera lectura.

Sea pues C una curva cerrada simple regular a trozos, y supongamos que está parametrizada por $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$. Fijemos $\varepsilon > 0$. Para empezar, debe observarse que, como F es de clase C^1, existe una extensión de F de clase C^1 a un abierto que contiene a D (seguiremos denotando esta extensión como F). Como consecuencia de esto y de la compacidad de D, existe un abierto A que contiene a D y con $\text{dist}(\partial A, \partial D) > 0$ y de modo que F es Lipschitz y de clase C^1 en todo A. Definamos

$$M = \sup\{\left|\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right| : (x,y) \in A\} + \sup\{\|F(x,y)\| : (x,y) \in A\} + 1$$

Por otra parte, al ser γ concatenación de caminos C^1, es un camino Lipschitz. Por tanto, eligiendo

$$\delta_0 = \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{\text{Lip}(F)\text{Lip}(\gamma)^2(b-a)+1}, \frac{\text{dist}(\partial A, \partial D)}{2(\text{Lip}(\gamma)+1)}\}$$

deducimos que si $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$ es una partición de $[a,b]$ con la propiedad de que $t_i - t_{i-1} \leq \delta_0$ para todo $i = 1, ..., N$ entonces la curva poligonal $\mathcal{P}$ que une los puntos $\gamma(t_0), \gamma(t_1), ..., \gamma(t_{N-1})$, $\gamma(t_N) = \gamma(t_0)$ (en este orden) está dentro de A. Además, como C es cerrada simple, podemos suponer (añadiendo más puntos a la partición de $[a,b]$ si fuera necesario) que la poligonal $\mathcal{P}$ así obtenida es también cerrada simple (ver el ejercicio 11.20), y entonces la región interior a esta poligonal $\mathcal{P}$ también queda dentro de A. Por otra parte también tenemos que, para cualesquiera $s_i \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
&|\sum_{i=1}^{N} \langle F(\gamma(t_{i-1})), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\rangle - \\
&\sum_{i=1}^{N} \langle F((1-s_i)\gamma(t_{i-1}) + s_i\gamma(t_i)), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\rangle| \leq \\
&\sum_{i=1}^{N} \|F((1-s_i)\gamma(t_{i-1}) + s_i\gamma(t_i)) - F(\gamma(t_{i-1}))\| \; \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq \\
&\text{Lip}(F)\text{Lip}(\gamma)^2(t_i - t_{i-1})^2 \leq \\
&\sum_{i=1}^{N} \text{Lip}(F)\text{Lip}(\gamma)^2 \frac{\varepsilon}{\text{Lip}(F)\text{Lip}(\gamma)^2(b-a)+1}(t_i - t_{i-1}) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ahora bien, si $\sigma_i(t) = (1-t)\gamma(t_{i-1}) + t\gamma(t_i)$, $t \in [0,1]$, es el segmento que une los puntos $\gamma(t_{i-1})$ y $\gamma(t_i)$, podemos aplicar el teorema del valor medio para integrales para encontrar $s_i \in [0,1]$ de modo que

$$\int_{\sigma_i} F{\cdot}ds = \int_0^1 \langle F(\sigma_i(t)), \sigma_i'(t)\rangle dt = \langle F((1-s_i)\gamma(t_{i-1})+s_i\gamma(t_i)), \gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\rangle$$

y por tanto, para esta elección de s_i, obtenemos

$$\int_{\mathcal{P}} F\cdot ds = \sum_{i=1}^N \int_{\sigma_i} F\cdot ds = \sum_{i=1}^N \langle F((1-s_i)\gamma(t_{i-1})+s_i\gamma(t_i)), \gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\rangle,$$

lo que, combinado con la desigualdad anterior, nos da

$$\left| \int_{\mathcal{P}} F\cdot ds - \sum_{i=1}^N \langle F(\gamma(t_{i-1})), \gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\rangle \right| \leq \varepsilon, \tag{1}$$

y esto vale para toda curva poligonal cerrada simple $\mathcal{P}$ que una los puntos $\gamma(t_0), \gamma(t_1), ..., \gamma(t_N)$, siendo $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$ y $t_i - t_{i-1} \leq \delta_0$ para todo i.

Por otro lado, aplicando el teorema de Darboux a la integral $\int_\gamma Pdx + Qdy$, obtenemos $\delta_1 > 0$, que podemos suponer menor o igual que δ_0, tal que, si $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$ es partición de $[a,b]$ y $|t_i - t_{i-1}| \leq \delta_1$ para todo $i = 1, ..., N$, entonces

$$\left| \int_\gamma Pdx + Qdy - \sum_{i=1}^N \langle F(\gamma(c_i)), \gamma'(c_i)\rangle (t_i - t_{i-1}) \right| \leq \varepsilon$$

cualesquiera que sean los $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Además, fijada una de estas particiones $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$ de $[a,b]$, como $\gamma = \gamma_1 * ... * \gamma_k$ es concatenación de caminos de clase C^1, podemos suponer (añadiendo puntos, si fuera necesario, a dicha partición) que γ es de clase C^1 en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$; en particular γ es uniformemente diferenciable en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ (ver el problema 7.29, y téngase en cuenta que γ podría no ser derivable en los extremos del intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, pero en todo caso sí tiene derivadas laterales en dichos extremos, y las derivadas son continuas), luego existe $\delta_2 > 0$, que podemos suponer menor o igual que δ_1, tal que si $t_{i-1} \leq s \leq t \leq t_i$ y $|t - s| \leq \delta_2$ entonces

$$\|\gamma(t) - \gamma(s) - \gamma_+'(s)(t-s)\| \leq \frac{\varepsilon}{M(b-a)}|t-s|.$$

Podemos entonces añadir todos los puntos necesarios a la partición de $[a,b]$ sobre la que venimos trabajando para que la nueva partición, que seguiremos denotando $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$, satisfaga que $t_i - t_{i-1} \leq \delta_2 \leq \delta_1 \leq \delta_0$, y por tanto también que

$$\left| \int_\gamma P dx + Q dy - \sum_{i=1}^{N} \langle F(\gamma(t_{i-1})), \gamma'(t_{i-1}) \rangle (t_i - t_{i-1}) \right| \leq \varepsilon, \qquad (2)$$

a la vez que

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) - \gamma'_+(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})\| \leq \frac{\varepsilon}{M(b-a)}(t_i - t_{i-1});$$

pero esta última desigualdad implica que

$$\left| \sum_{i=1}^{N} \langle F(\gamma(t_{i-1})), \gamma'_+(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \rangle - \sum_{i=1}^{N} \langle F(\gamma(t_{i-1})), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \rangle \right| \leq$$
$$M \frac{\varepsilon}{M(b-a)}(b-a) = \varepsilon,$$

lo que junto con (2) permite obtener

$$\left| \int_\gamma P dx + Q dy - \sum_{i=1}^{N} \langle F(\gamma(t_{i-1})), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \rangle \right| \leq 2\varepsilon, \qquad (3)$$

y que a su vez combinado con (1) nos da

$$\left| \int_{\mathcal{P}} P dx + Q dy - \int_C P dx + Q dy \right| \leq 3\varepsilon, \qquad (4)$$

para toda curva cerrada simple poligonal $\mathcal{P}$ que una $\gamma(t_1), \gamma(t_2), ..., \gamma(t_{N-1})$, $\gamma(t_N) = \gamma(t_0)$, en este orden, y siempre y cuando $0 < t_i - t_{i-1} \leq \delta_2 \leq \delta_1$ para todo $i = 1, ..., N$.

Por otra parte, como $\partial D = C$ tiene contenido cero, existe una colección finita $Q_1, ..., Q_k$ de cubos abiertos que recubren C y cuyos volúmenes suman menos que ε/M. Definamos $U = \bigcup_{j=1}^{k} Q_j$. Como U es abierto y contiene al compacto C, tenemos que la distancia de C al complementario de U es positiva, es decir, $d(C, \mathbb{R}^2 \setminus U) > 0$. Pongamos ahora

$$\delta_3 = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \frac{d(C, \mathbb{R}^2 \setminus U)}{2(\text{Lip}(\gamma) + 1)}\};$$

entonces, añadiendo puntos si fuera necesario a la partición $a = t_0 < t_1 < ... < t_N$ de $[a,b]$ sobre la que venimos trabajando, podemos suponer que $t_i - t_{i-1} \leq \delta_3$ para todo $i = 1, ..., N$, lo cual implica que la poligonal $\mathcal{P}$ que une los puntos $\gamma(t_1), \gamma(t_2), ..., \gamma(t_N) = \gamma(t_0)$ queda dentro del abierto U (en efecto, para todo z del segmento $[\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$, se tiene

$$d(z, C) \leq \mathrm{Lip}(\gamma)(t_i - t_{i-1}) \leq \frac{\mathrm{Lip}(\gamma) d(C, \mathbb{R}^2 \setminus U)}{2(\mathrm{Lip}(\gamma) + 1)} < d(C, \mathbb{R}^2 \setminus U),$$

luego $z \in U$).

Definamos también $W = D \cup U$ y $V = D \setminus U$, que son conjuntos con área que cumplen que

$$a(D) - \frac{\varepsilon}{M} \leq a(D) - a(U) \leq a(V) \leq a(D) \leq a(W) \leq a(D) + a(U) \leq a(D) + \frac{\varepsilon}{M}.$$

Sean entonces $\mathcal{D}$ la región interior a la poligonal cerrada simple $\mathcal{P}$ que une los puntos $\gamma(t_1), \gamma(t_2), ..., \gamma(t_N) = \gamma(t_0)$ en este orden. Como $\mathcal{P} \subset U$, es claro que

$$V \subset \mathcal{D} \subset W,$$

y entonces

$$a(D) - \frac{\varepsilon}{M} \leq a(V) \leq a(\mathcal{D}) \leq a(W) \leq a(D) + \frac{\varepsilon}{M}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy - \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \right| \leq \\
&\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right| |1_{\mathcal{D}} - 1_D| \, dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^2} M \; |1_{\mathcal{D}} - 1_D| \, dxdy \leq \\
&M \left(a(\mathcal{D} \setminus D) + a(D \setminus \mathcal{D}) \right) \leq M \left(\frac{\varepsilon}{M} + \frac{\varepsilon}{M} \right) = 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

es decir

$$\left| \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy - \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \right| \leq 2\varepsilon. \tag{5}$$

Finalmente, combinando (4) y (5) y usando que

$$\int_{\mathcal{P}} Pdx + Qdy = \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

(es decir, la fórmula de Green demostrada ya en el paso 4 para recintos limitados por curvas cerradas simples poligonales), deducimos que

$$\left| \int_C P dx + Q dy - \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \right| \leq 5\varepsilon,$$

y como esto sirve para todo $\varepsilon > 0$ se concluye que

$$\int_C P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

es decir, la fórmula de Green es válida en el caso general de una curva cerrada simple regular a trozos. □

Una aplicación importante de la fórmula de Green para el área encerrada por una curva plana es la *desigualdad isoperimétrica*:

Teorema 11.7 *De todas las curvas cerradas simples en $\mathbb{R}^2$ con longitud fija ℓ, las que encierran mayos área son las circunferencias de radio $r = \ell/2\pi$.*

Es decir, si C es una curva cerrada simple de longitud ℓ, y A es el área de la región D encerrada por C, entonces

$$\ell^2 - 4\pi A \geq 0,$$

y la igualdad se da si y sólo si C es una circunferencia.

La demostración de este resultado puede consultarse, por ejemplo, en el libro de Do Carmo, *Geometría diferencial de curvas y superficies*, editado por Alianza Universidad (Madrid 1990), páginas 46-48.

Problemas

11.8 Utilizar el teorema de Green para calcular $\int_C (y^2 + x^3)dx + x^4 dy$, donde

1. C es la frontera de $[0,1] \times [0,1]$, orientado positivamente.

2. C es la frontera del cuadrado de vértices (a, b) con $|a| = |b| = 2$, orientado negativamente.

11.9 Calcular $\int_C Pdx+Qdy$, donde $P(x,y) = xe^{-y^2}$, $Q(x,y) = -x^2ye^{-y^2} + 1/(x^2+y^2+1)$, y C es la frontera del cuadrado de lado $2a$ determinado por las desigualdades $|x| \leq a$ e $|y| \leq a$, orientado positivamente.

11.10 Usar la expresión para el área encerrada por una curva que proporciona el teorema de Green para dar otra demostración de la fórmula del área del recinto delimitado por una curva en coordenadas polares.

11.11 Calcular el área del trébol de cuatro hojas $\rho = 3\sin 2\theta$.

11.12 Sea D una región para la cual se sabe que es cierto el teorema de Green. Usar el teorema del cambio de variables para demostrar que el teorema de Green es entonces válido para toda región A que sea difeomorfa a D (es decir, existe un difeomorfismo $g : U \longrightarrow V$ de clase C^1 entre dos abiertos U, V de $\mathbb{R}^2$ que contienen a A y D respectivamente, tal que $g(A) = D$).

11.13 En las mismas hipótesis del teorema de Green, si $F = (P,Q)$ y definimos
$$\text{div}F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y},$$
comprobar que el teorema de Green se expresa diciendo que
$$\int_{\partial D} F \cdot N ds = \int_D \text{div}F dxdy,$$
donde $F \cdot N$ denota el campo escalar obtenido del producto escalar del campo F con el vector normal unitario N exterior a C. A esta forma del teorema de Green también se le llama *teorema de la divergencia* en el plano.

11.14 Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ abierto, sea C una curva cerrada simple regular a trozos, sea D la parte interior de C, y supongamos que $D \cup C \subset A$. Sean $u, v \in C^2(A)$. Denotamos:
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = div(\nabla u)$$
$$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}).$$
sea N la normal unitaria exterior en C. Denotamos $\frac{\partial u}{\partial N} = \nabla u \cdot N$ (producto escalar), la *derivada normal* de u según C (esto no es más que la derivada direccional de u en la dirección de N).

(a) Demostrar las identidades de Green:

$$\int_D v\Delta u + \int_D \nabla u \cdot \nabla v = \int_C v\frac{\partial u}{\partial N} \tag{11.3}$$

$$\int_D (v\Delta u - u\Delta v) = \int_C (v\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial v}{\partial N}). \tag{11.4}$$

(b) Supongamos ahora que u es armónica en D, es decir, $\Delta u = 0$ en D. Demostrar que si u se anula en C entonces u es idénticamente nula en D. Deducir también de (a) que si tanto u como v son armónicas en D entonces

$$\int_C v\frac{\partial u}{\partial N} = \int_C u\frac{\partial v}{\partial N}.$$

11.15 Sea D un recinto como este:

solo que con n agujeros delimitados por curvas cerradas simples regulares a trozos, en lugar de solamente tres. Probar la siguiente generalización del teorema de Green: para todo campo $F = (P, Q)$ de clase C^1 en D se tiene que

$$\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \int_C (Pdx + Qdy) - \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} (Pdx + Qdy).$$

Indicación: descomponer el conjunto D en unión de recintos simplemente conexos a los que se puede aplicar el teorema de Green; usar inducción sobre n.

11.16 *Invariancia de una integral de línea al deformar el camino.* Sea $F = (P, Q)$ un campo vectorial C^1 en un conjunto abierto y conexo A del plano $\mathbb{R}^2$. Supongamos que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ en todo A. Sean C_1 y C_2 dos curvas cerradas simples regulares a trozos dentro de A y que satisfagan las siguientes condiciones:

1. C_2 está en la región interior a C_1.

2. Los puntos interiores a C_1 que son exteriores a C_2 pertenecen a A.

Probar que entonces se tiene que

$$\int_{C_1} Pdx + Qdy = \int_{C_2} Pdx + Qdy,$$

siempre que ambas curvas se recorran en el mismo sentido. Nótese que cuando A es simplemente conexo (no tiene agujeros) esto implica que $\int_\gamma F \cdot ds$ es independiente del camino.
Indicación: Usar el problema anterior ($n = 1$).

11.17 *El número de giros (the winding number).* Sea C una curva regular a trozos en $\mathbb{R}^2$, parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$. Se define el número de giros de γ con respecto de un punto $p = (x_0, y_0)$ *no* situado sobre la curva γ como

$$W(C,p) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{(x - x_0)dy - (y - y_0)dx}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Puede demostrarse que $W(C,p)$ es siempre un número entero. En el caso en que C sea una curva cerrada simple, probar que $W(C,p) = 0$ si p está en la región exterior a C, mientras que $W(C,p) = 1$ si p es interior a C y esta curva está orientada positivamente, y $W(C,p) = -1$ si p es interior a C y C está orientada negativamente. *Indicación:* usar el problema anterior, tomando una de las dos curvas como una circunferencia adecuada.

11.18 Para $(x,y) \neq (0,0)$ consideramos $\varphi(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ y $F = (\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x})$. Sea C una curva de Jordan regular a trozos, contenida en $\{(x,y) : 1 < x^2+y^2 < 25\}$. Hallar los posibles valores de la integral de F a lo largo de C.

11.19 ¿Existe alguna curva cerrada simple en el plano que tenga una longitud de 6 metros y que delimite un área de 3 metros cuadrados?

11.20 Sea C una curva cerrada simple en $\mathbb{R}^2$. Supongamos que C está parametrizada por $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ que es regular a trozos (es decir, γ puede escribirse como concatenación de caminos de clase C^1 con velocidad no nula en todos los puntos). Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$ es una partición de $[a,b]$ tal que $t_i - t_{i-1} \leq \delta$ para todo $i = 1, ..., N$, entonces la poligonal $\mathcal{P}$ que une los puntos $\gamma(t_1), \gamma(t_2), ..., \gamma(t_N) = \gamma(t_0)$ es también cerrada simple.