Sistemas de Comunicación

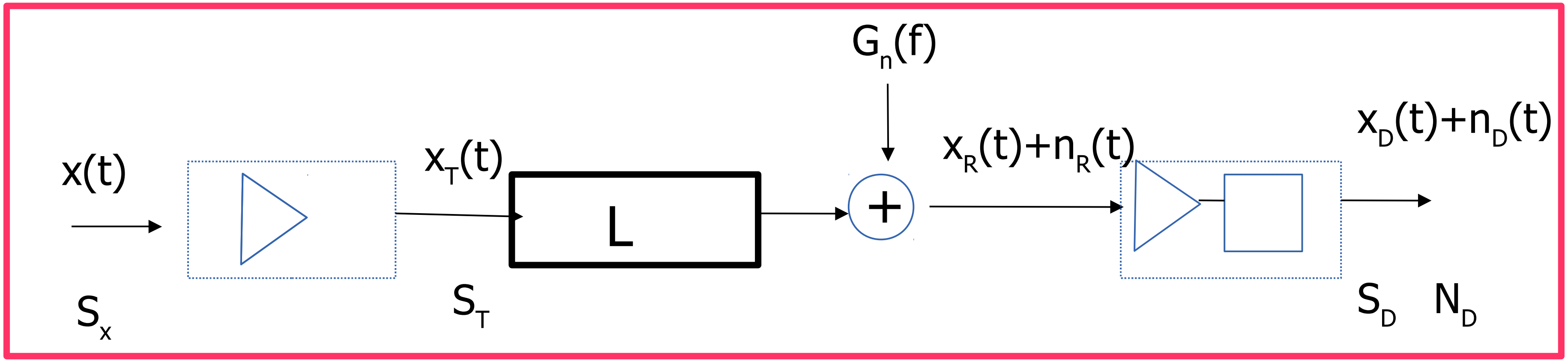
Clase 2: Desempeño en
Banda Base
2016

Objetivos de la clase

Análisis de un sistema de comunicación analógico en banda base.

- Caracterizar las señales
- Modelo básico de ruido
- Modelo simplificado del canal
- Desempeño en banda base

Diagrama de bloques de un sistema de comunicación analógico banda base



Banda Base – Banda de frecuencia de la señal x(t)

Analógico - Continua

Benchmark- Referencia para comparar desempeño

Caracterización de la señal

- Señal fisicamente realizable:.

1. Soporte acotado – duración finita
2. Ancho de banda limitado
3. Continua
4. Valor de pico finito
5. Toman valores reales

- Modelos aproximados simplificados: Nivel de detalle depende de la aplicación.
  - Ej: TF, STFT

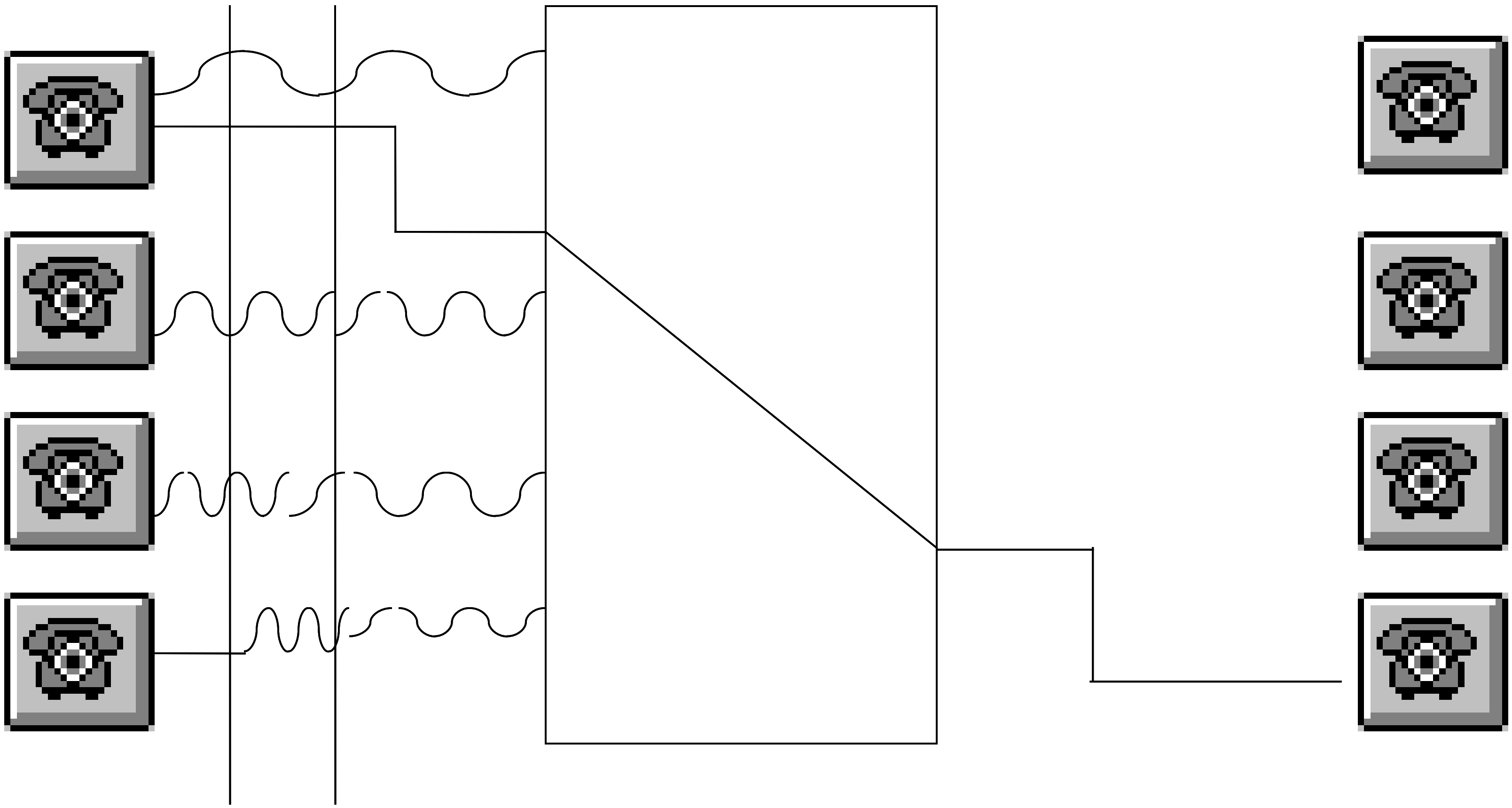
Clasificación de las señales

- Señales determinísticas: no existe incertidumbre con respecto al valor que toma la señal en el tiempo. Se modelan con expresiones matemáticas explícitas.

- Señales aleatorias: existe un cierto grado de incertidumbre antes de la ocurrencia de la señal. Observada en un período largo puede exhibir ciertas regularidades que se pueden describir en términos de probabilidades y promedios estadísticos

  - modelado de procesos que perturban el sistema, ejemplo el ruido
  - modelado de la información, teniendo en cuenta la incertidumbre que tiene el receptor sobre lo que se trasmitió

Procesos Estocásticos



Procesos Estocásticos

- Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias que modela una señal desconocida.
- Proceso estacionario: tiene propiedades estadísticas que no varían en el tiempo (las pdfs conjuntas no cambian)
- Proceso estacionario en sentido amplio (WSS): tiene media y autocorrelación que no cambia con el tiempo
- Proceso ergódico: los promedios temporales convergen a los promedios estadísticos (Ej. promedio temporal = valor esperado en media).
- Asumiremos que los procesos con los que trabajamos son WSS y ergódicos.

Señales de Energía

$$\boxed{0 < E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt < \infty}$$

Señales fisicamente realizables son de energía

Teorema de Parseval

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

- Densidad Espectral de Energía: $\boxed{\psi_x(f) = |X(f)|^2}$

Mide la distribución de energía E en frecuencia.

- Propiedades:

$$\psi_x(f) \geq 0 \qquad \psi_x(f) = \psi_x(-f) \qquad \psi_y(f) = |H(f)|^2 \psi_x(f)$$

Autocorrelación de Señales de Energía

$$\boxed{R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,x(t-\tau)\,dt}$$

Mide la similitud de una señal con una versión retardada de si misma.

$$E = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt$$

.

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0) \qquad R_x(\tau) = R_x(-\tau) \qquad R_x(\tau) \xrightarrow{F} \psi_x(f)$$

Señales de Potencia

$$P = \lim \overrightarrow{T \to \infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int |x_T(t)|^2 dt = \int G_x(f)\, df$$

Tiene energía infinita: Ej. Sen x

Densidad Espectral de Potencia: $G_x(f) = \lim\ 1/2\mathrm{T}|X_T(f)|^2$

Mide la distribución de potencia P en frecuencia.

- Propiedades:

$$G_x(f) \geq 0 \qquad G_x(f) = G_x(-f) \qquad G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$$

Autocorrelación de Señales de Potencia

$$R_x(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, x(t-\tau)\, dt$$

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$$

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

$$R_x(\tau) \xrightarrow{F} G_x(f)$$

Para señales periódicas la autocorrelación es una función periódica

.

Autocorrelación de Procesos

Mide como cambia con el tiempo un proceso estocástico

Promedio de ensambles: $\overline{x}(t) = E(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x,t)\, dx$

Autocorrelación: $R_x(t_1,t_2) = E(x(t_1)\, x(t_2)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_{x_1 x_2}(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2$

Proceso estacionario en sentido amplio si:

$$\boxed{\begin{gathered} E(x(t)) = m_x \\ R_x(t_1,t_2) = R_x(t_1-t_2) = R_x(t) \end{gathered}}$$

Propiedades: Potencia

$$P = R_x(0) = \overline{x^2} \qquad |R_x(t)| \le R_x(0) \qquad R_x(-t) = R_x(t)$$

Procesos Estocásticos

No puedo caracterizar el comportamiento del proceso a partir del conocimiento de una realización.

En determinadas hipótesis sobre el comportamiento del proceso (WSS, estacionaridad en el sentido amplio) me alcanza conocer/estimar los momentos de primer y segundo orden.

Teorema de Wiener-Khintchine: Si x(t) es un proceso estacionario en sentido amplio $G_x(f)=F(R_x(\tau))$ y a la inversa $R_x(\tau)=F^{-1}(G_x(f))$ siempre que $R_x(\tau)$ llegue a ser suficientemente pequeña para valores grandes de τ de forma que:.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\tau R\left(\tau\right)\right| d\tau < \infty$$

Procesos Estocásticos

$$G_x(f) \geq 0$$

$$G_x(f) = G_x(-f)$$

cuando x(t) es real

Cuando *x(t)* es estacionaria en sentido amplio:

$$G_x(f) \xrightarrow{F^{-1}} R_x(\tau)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)\,df = R_x(0) = P$$

$$G_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\,d\tau$$

$$G_y(f) = \left|H(f)\right|^2 G_x(f)$$

Modelado de Ruido

Señal aleatoria caracterizada:

$G_n(f)$: densidad espectral de potencia

$f_N(n)$: densidad de probabilidad

Hipótesis usuales: AWGN

1. Aditivo (A)
2. Blanco (W) $G_n(f)=\eta/2$
3. Gaussiano (G) $f_N(n)=N(m_n,\sigma_n)$

Modelo adecuado para ruido térmico, $R_n(\tau)=\eta/2\ \delta(\tau)$, dos muestras separadas t pequeño son no correlacionadas, ruido blanco cambia muy rápido.

Ruido coloreado: ruido blanco filtrado $G_y(f)= \eta/2\ |H(f)|^2$

Procesos Gaussianos

Procesos con distribución uniforme : se tiene una gran incertidumbre sobre los valores que toma el proceso.

Procesos gaussianos: buenos para el modelado de señales que son producto de la superposición de muchisimas fuentes independientes mas o menos idénticamente distribuidas

Propiedades:

- Si es estacionario en el sentido amplio lo es en el estricto
- Cada punto de muestreo de un proceso Gaussiano es una variable aleatoria Gaussiana
- Si la entrada a un sistema lineal es un proceso Gaussiano la salida también es un proceso Gaussiano
- Teorema Central del límite

Modelado Simplificado del Canal

Hipótesis Usuales:

1. Filtro LTI
2. No distorsiona
3. Banda pasante $B_T > W$

$$\boxed{H_c(f) = 1/\sqrt{L}\ e^{-j2\pi f T_d}\ \Pi(f/2B_T)}$$

Un sistema que no distorsiona no modifica la forma de la señal en el tiempo a lo sumo atenúa y la retarda

Un sistema lineal invariante en el tiempo SLIT:

$$y(t) = x(t) * h(t) \iff Y(f) = X(f)\,H(f)$$

Si no distorsiona: $\boxed{y(t) = A\,x(t-T_d) \qquad H(f) = A\,e^{-j2\pi f T_d}}$

Atenuación

$$\boxed{L=1/g=P_{in}/P_{out}}$$

pérdida de potencia

Para cables duros (alámbricos):

$$\boxed{L=10^{\alpha l/10}}$$

$L_{dB}=\alpha l$ α: coeficiente de atenuación en dB/km

l: longitud del tramo en km

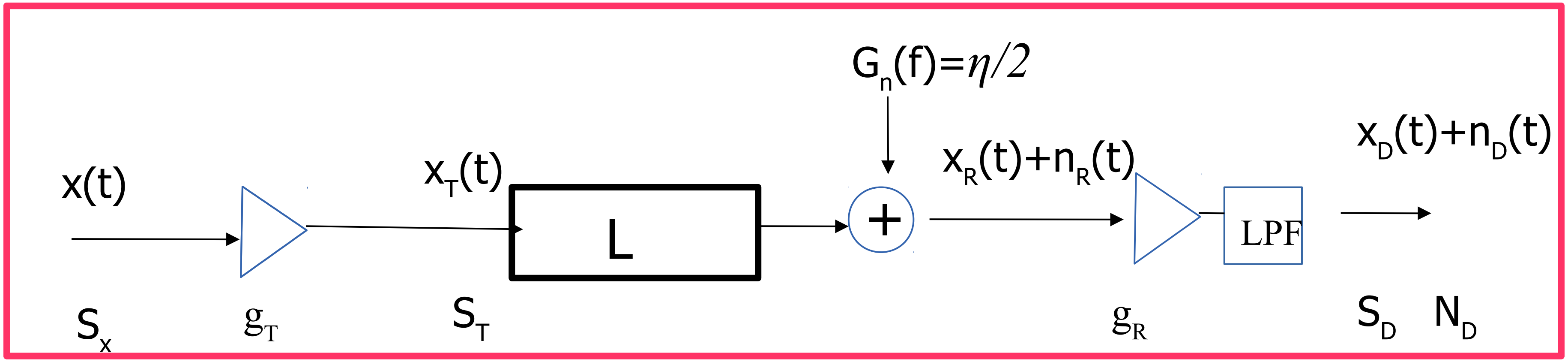
α: depende de la frecuencia y el medio.

Coeficiente de Atenuación

Medio de TX	Frecuencia	α (dB/km)
Par de cobre 0,3 cm	1 kHz	0,05
	10 kHz	2
	100 kHz	3
	300 kHz	6
coaxil	100 kHz	1
Guia de onda (5x2,5cm)	10 GHz	5
Fibra óptica	3,6 x10^{14}	2,5

Para cables blandos (inalámbricos): $\boxed{L=(4\pi l/\lambda)^2}$

Transmisión de señales analógicas en banda base



Objetivo: Trasmisión fiel del mensaje

Sup: W: ancho de banda de x(t) : $G_x(f) \approx 0$ para todo $f \geq W$

$S_x = x^2 \qquad S_T = g_T S_x \qquad S_R = S_T/L \qquad S_D = g_R S_R \qquad N_R = \eta W \qquad N_D = g_R \eta W$

$(S/N)_R = S_R/\eta W = \gamma = S_T/L\eta W \qquad (S/N)_D = g_R S_R/g_R \eta W = S_R/\eta W = \gamma$

Parámetro con el cual comparo desempeño de modulaciones

Requisitos típicos de $(S/N)_D$

	W	$(S/N)_D$
Voz calidad telefónica	300-3400 Hz	25-35
AM	100 Hz- 5 kHz	40-50
Audio de alta fidelidad	20 Hz- 20 kHz	55-65
Video	60 Hz- 4,2 MHz	45-55

AM: $(S/N)_D \leq \gamma/2$ para la misma potencia trasmitida AM es menos eficiente en el uso de la energía que Banda Base