Problemas que pueden modelarse y resolverse mediante sucesiones

Juan Piccini

March 25, 2016

Parte del siguiente material está inspirado en el capítulo 1 del libro "Introducción al Cálculo"de Fernando Peláez Bruno, a quien agradezco su consentimiento para su utilización.

1 Introducción

Este material pretende mostrar una serie de problemas que pueden ser modelados y resueltos mediante sucesiones. Los ejemplos presentados son solamente unos pocos de un vasto conjunto de interés en varias ramas del conocimiento.

2 El Modelo Exponencial a Tiempo Discreto: Bolas de nieve y ovillos de lana

2.1 Bolas de Nieve: Interés compuesto

Vamos a modelar la evolución de un capital (dinero) que genera intereses. Llamemos C al capital inicial (medido en alguna unidad monetaria tal como pesos, dólares, euros, etc.). Supongamos que dicho capital es colocado a una tasa anual T con capitalización anual.

Esto significa que en cada período el interés se calcula sobre el capital más los intereses previos. Llamemos s_n al saldo o cantidad de dinero en el año n. Al comienzo tenemos

$$s_0 = C$$

Al finalizar el primer año, el saldo es la suma del capital inicial más los intereses generados, esto es

$$s_1 = C + TC = C(1 + T)$$

Al finalizar el segundo año, tendremos

$$s_2 = s_1 + Ts_1 = s_1(1 + T) = C(1 + T)(1 + T) = C(1 + T)^2$$

Es claro (se puede demostrar por Inducción Completa) que si mantenemos estas reglas de juego por n años, al finalizar el n-ésimo año tendremos

$$s_n = C(1+T)^n \tag{1}$$

A modo de ejemplo, supongamos $C = 1000$, $T = 0.06$ (una tasa del 6% anual), con lo que $s_n = 1000(1.06)^n$. Notemos que al ser $1 + T$ mayor que 1, al elevarlo al exponente n esta cantidad crece cada vez más (de ahí lo de bola de nieve).

La siguiente tabla muestra la evolución de nuestro saldo según pasan los años. Si por ejemplo deseamos saber cuantos años debemos esperar hasta tener 4000

tiempo	0	1	2	3	4	5	10	20	30
saldo	1000.00	1060.00	1123.60	1191.02	1262.48	1338.23	1790.85	3207.14	5743.49

Table 1: Interés Compuesto

unidades monetarias, lo que estamos buscando es el n tal que $C(1.06)^n = 4000$, o lo que es lo mismo el n tal que $(1.06)^n = \frac{4000}{1000} = 4$.

Esto no es otra cosa que el logaritmo de 4 en base 1.06, el exponente al cual debemos elevar la base 1.06 para que nos de igual a 4. ***Los logaritmos pueden interpretarse entonces como tiempos de espera hasta que una función exponencial alcanza un cierto valor***.

Ahora bien, las calculadoras solamente tienen teclas para logaritmos en base 10 o en base e. No hay tecla para logaritmos en base 1.06.

La fórmula de cambio de base nos permite subsanar este inconveniente :

$$\log_b(a) = \frac{log_e(a)}{log_e(b)} = \frac{log_{10}(a)}{log_{10}(b)}$$

Entonces $log_{1.06}(4) = \dfrac{log_e(4)}{log_e(1.06)} = 23.791$. Por tanto tendremos que esperar a que pasen 24 años para que nuestros 1.000 se conviertan en 4.000

2.2 Ovillos de Lana: Emigración campo-ciudad

En el ejemplo anterior la tasa es un número positivo, $0 < T < 1$, pero podría suceder que fuera un número negativo. Un ejemplo típico es la migración campo-ciudad.

Supongamos una determinada villa o pueblito donde cada año una cierta proporción T de su población migra hacia otra ciudad más grande. Para fijar ideas, supongamos que inicialmente hay C habitantes y que s_n es la cantidad de habitantes luego de n años de perder una proporción T cada año.

Tenemos que $s_0 = C$, $s_1 = C - TC = C(1-T)$, $s_2 = s_1 - Ts_1 = s_1(1-T) = C(1-T)^2$, y en general

$$s_n = C(1-T)^n$$

El modelo del interés compuesto se sigue aplicando, pero ahora $1 - T = 1 - 0.06 = 0.94 < 1$, por lo que al elevarlo al exponente n se va a hacer cada vez menor (de ahí el nombre de ovillo de lana).

La siguiene tabla ilustra la evolución de dicha población para $C = 1000$ y $T = 0.06$. Si asumimos que en todo momento los niños en edad escolar son

tiempo	0	1	2	3	4	5	10	20	30
saldo	1000.00	940.00	883.60	830.58	780.55	733.90	538.62	290.11	156.26

Table 2: Migración Campo-Ciudad

un 20% de la población, que cuando queden menos de 5 niños la escuela de la localidad cerrará (lo que obligará a dichos niños a trasladarse quien sabe cuantos kilómetros todos los días), en cuantos años es de esperar que cierre la escuela?

Lo que buscamos es $n : (0.2)(1000(0.94)^n) \leq 5$, o $(0.94)^n \leq \frac{5}{200}$. Esto es lo mismo que $n \leq log_{0.94}(1/40) = 59.617$ (de nuevo hemos aplicado la fórmula de cambio de base).

Vemos que de mantenerse ese proceso, en 60 años no quedarán casi niños en dicha población.

3 El Modelo Exponencial a Tiempo Continuo

Volvamos al ejemplo inicial de interés compuesto, con nuestra tasa T de interés anual, pero supongamos que el banco nos paga los intereses repartidos en dos veces al año.

Al finalizar el primer semestre el saldo provisorio es de $C + \frac{T}{2}C = C(1 + \frac{T}{2})$, este saldo a su vez genera intereses durante el segundo semestre (se llama capitalización semestral) y al final del primer año tendremos $s_1 = C(1+\frac{T}{2})(1+\frac{T}{2}) = C(1+\frac{T}{2})^2$.

Si optamos por esta opción, vemos que nuestros 1.000 al cabo de un año se convierten en 1060.9, algo más que con la capitalización anual. Repitiendo esto, llegaremos a $s_n = C(1+\frac{T}{2})^{2n}$.

Del mismo modo podríamos tener nuestra tasa T anual pero con capitalización mensual, con lo que nuestro saldo al finalizar el primer año sería $s_1 = C(1+\frac{T}{12})^{12}$, y luego de n años tendríamos $s_n = C(1+\frac{T}{12})^{12n}$. Siempre manteniendo $C = 1000$ y $T = 0.06$, la capitalización mensual nos daría al final del primer año 1.061,6, aún mayor que con la capitalización semestral.

En este punto uno se pregunta que pasaría si la capitalización fuera diaria. En este caso $s_1 = C(1+\frac{T}{365})^{365}$, lo que en nuestro caso nos daría 1.061,831.

Y si la capitalización fuera cada hora, cada minuto, cada milisegundo? Llamando x a la cantidad de veces por año que se capitaliza el interés, entonces

$$s_1 = C\left(1+\frac{T}{x}\right)^x, \; s_n = C\left(1+\frac{T}{x}\right)^{nx} \qquad (2)$$

Si existiera el límite de las expresiones anteriores cuando $x \to +\infty$ entonces sería una suerte de capitalización "instante a instante", también llamada ***capitalización continua***.

Este problema financiero llevó a Jacobo Bernoulli (1654-1705) a estudiar el límite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

Bernoulli demostró que dicho límite es finito y lo designó inicialmente con la letra b. Este límite resultó coincidir con la base de los "logaritmos naturales"estudiados años antes por John Neper (1550-1617).

Leonard Euler (1707-1783) estudió en profundidad este número b, bautizándolo con la letra e, nombre que se mantiene hasta hoy.

Utilizando que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

y que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{T}{x}\right)^x = e^T$$

podemos decir que si la capitalización es continua, entonces el saldo al finalizar el primer año vale

$$s_1 = Ce^T$$

y que al finalizar el n-simo año vale

$$s_n = Ce^{Tn} \tag{3}$$

En nuestro ejemplo, el saldo al final del primer año es $s_1 = 1000e^{0.06} = 1061,83$. Esta cantidad es lo más que se le podría pedir a nuestro hipotético banco.

Notemos que la unidad temporal (año) no juega papel alguno. Lo importante es que tenemos una unidad temporal que luego se subdivide cada vez más.

Si el problema fuera el de una población de bacterias que se multiplica, la unidad temporal podría ser la hora o el minuto.

4 Algunas aplicaciones

4.1 Modelo de Enfriamiento de Newton

Este modelo establece que si tenemos un cuerpo a una temperatura C en un medio ambiente a temperatura T_M con $C > T_M$, entonces el cuerpo perderá calor (se enfriará) en forma proporcional a la diferencia de temperaturas con el medio ambiente circundante.

Esto implica que al comienzo (cuando la diferencia de temperaturas entre cuerpo y medio es grande) el cuerpo pierde calor rápidamente, pero a medida que se va enfriando y la diferencia de temperatura con el medio se hace menor, pierde calor cada vez más lentamente.

De modo similar, si el cuerpo tiene menos temperatura que el medio circundante entonces se calentará con una velocidad proporcional a la diferencia de temperaturas entre el mismo y el medio. Esto explica porqué un termo mantiene el agua fría por más tiempo que el que mantiene el agua caliente.

Veremos que este modelo es en esencia el modelo exponencial. El capital inicial C es en este caso la temperatura inicial del cuerpo en cuestión (también llamada T_0), y el saldo s_n es la temperatura del cuerpo n unidades de tiempo después, que llamaremos T_n. Supondremos que T_M se mantiene constante.

Dada una unidad de tiempo (p.ej. minutos), la temperatura pasado un minuto será

$$T_1 = C - k(C - T_M) = C(1-k) + kT_M$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Siguiendo el mismo razonamiento, al final del segundo minuto la temperatura es

$$T_2 = T_1 - k(T_1 - T_M) = T_1(1-k) + kT_M$$

sustituyendo T_1 obtenemos

$$T_2 = C(1-k)^2 + kT_M(1-k) + kT_M$$

Razonando igual,

$$T_3 = T_2 - k(T_2 - T_M) = T_2(1-k) + kT_M$$

sustituyendo T_2, obtenemos

$$T_3 = C(1-k)^3 + kT_m(1-k)^2 + kT_M(1-k) + kT_M$$

Inducción mediante, llegamos a que

$$T_n = C(1-k)^n + kT_M[(1-k)^{n-1} + (1-k)^{n-2} + \cdots + (1-k) + (1-k)^0]$$

Veamos cuanto da la suma dentro del paréntesis cuadrado (a la que llamaremos S_{n-1}). Si llamamos $u = 1-k$, debemos calcular $S_{n-1} = u^{n-1} + u^{n-2} + \cdots + u^1 + u^0$.

Notemos que

$$(1-u)S_{n-1} = (1-u)[1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-1}]$$

Aplicando distributiva y cancelando términos, vemos que $(1-u)S_{n-1} = 1 - u^n$, de donde (suponiendo $1 - u \neq 0$, o sea $k \neq 0$)

$$S_{n-1} = \frac{1-u^n}{1-u}$$

Si deshacemos el cambio $u = 1-k$, tenemos que $S_{n-1} = \dfrac{1-(1-k)^n}{k}$. Por tanto tenemos que

$$T_n = C(1-k)^n + kT_M\frac{1-(1-k)^n}{k} = C(1-k)^n + T_M(1-(1-k)^n)$$

Sacando $(1-k)^n$ de factor común, obtenemos

$$T_n = (C - T_M)(1-k)^n + T_M$$

y si llamamos $K = C - T_M$, entonces

$$T_n = K(1-k)^n + T_M \tag{4}$$

que es el modelo exponencial de la ecuación (1) más una constante T_M.

Si pasamos a tiempo continuo como en el ejemplo del interés compuesto, tendremos

$$T_n = K\left(1 - \frac{k}{x}\right)^{nx} + T_M \tag{5}$$

Tomando límite cuando $x \to +\infty$ obtenemos

$$T_n = Ke^{-nk} + T_M \tag{6}$$

siendo $K = C - T_M = T_0 - T_M$.

4.2 Reemplazo de circulante

Supongamos que se desea reemplazar los billetes en circulación por billetes nuevos, más difíciles de falsificar. Una forma razonable de hacerlo es a través del sistema bancario, reemplazando los billetes viejos (los cuales son destruídos) por billetes nuevos.

Supongamos que el total circulante es de 10.000 millones (dólares p.ej.) de los cualels cada día ingresan 50 millones al sistema bancario. Al final de cada día los bancos reemplazan los billetes viejos por los nuevos, y al otro día esos 50 millones regresan a la calle. Cuanto tiempo hará falta para reemplazar el 99% de todo el circulante?

Si medimos el tiempo en días, llamemos TC al total de circulante (10.000 millones) y s_n a la cantidad (medida en millones) de circulante nuevo al finalizar el día n. Entonces $s_1 = 50$.

Esto es, al final del día 1 tenemos 50 millones en los bancos cuya totalidad se reemplaza por billetes nuevos y al día siguiente salen a circular.

Al final del día 2, volvemos a tener 50 millones en los bancos, pero ahora no son 100% billetes viejos, sino que hay una proporción de billetes nuevos que no hace falta reemplazar. Por tanto al final del día 2 la cantidad de billetes nuevos serán los 50 millones ya cambiados más los que se cambien de los 50 millones que al final del día están en los bancos. Esto es,

$$s_2 = s_1 + 50\left(1 - \frac{s_1}{TC}\right) = s_1\left(1 - \frac{50}{TC}\right) + 50 = 99.75$$

Razonando igual,

$$s_3 = s_2 + 50\left(1 - \frac{s_2}{TC}\right) = s_2\left(1 - \frac{50}{TC}\right) + 50$$

reemplazando s_2 obtenemos

$$s_3 = s_1 \left(1 - \frac{50}{TC}\right)^2 + 50 \left[1 + \left(1 - \frac{50}{TC}\right)\right] = 149.25$$

Razonando igual,

$$s_4 = s_3 + 50 \left(1 - \frac{s_3}{TC}\right) = s_3 \left(1 - \frac{50}{TC}\right) + 50$$

y reemplazando s_3 obtendremos

$$s_4 = s_1 \left(1 - \frac{50}{TC}\right)^3 + 50 \left[1 + \left(1 - \frac{50}{TC}\right)^1 + \left(1 - \frac{50}{TC}\right)^2\right] = 198.505$$

Como

$$s_n = s_{n-1} + 50 \left(1 - \frac{s_{n-1}}{TC}\right)$$

tomando factor común obtenemos

$$s_n = s_{n-1} \left(1 - \frac{50}{TC}\right) + 50$$

Por inducción llegamos a que

$$s_n = s_1 \left(1 - \frac{50}{TC}\right)^{n-1} + 50 \sum_{j=0}^{n-2} \left(1 - \frac{50}{TC}\right)^j$$

Como $s_1 = 50$, reemplazando llegamos a que

$$s_n = 50 \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{50}{TC}\right)^j$$

Como $\sum_{j=0}^{j=n-1} u^j = \frac{1 - u^n}{1 - u}$, tomando $u = 1 - \frac{50}{TC}$ tenemos que

$$s_n = TC \left(1 - \left(1 - \frac{50}{TC}\right)^n\right) = TC - TC \left(1 - \frac{50}{TC}\right)^n$$

Llamando $K = TC$ y $k = \frac{50}{TC} = 0.005$, tendremos

$$s_n = K - K (1 - k)^n$$

Que es el mismo modelo usado para el enfriamiento.

Si asumimos que los bancos van reemplazando los billetes viejos a medida que ingresan (un reemplazo continuo) en lugar de esperar a cerrar para luego reemplazar, tendremos

$$s_n = K - K \left(1 - \frac{k}{x}\right)^{nx}$$

Tomando límite obtenemos

$$s_n = K(1 - e^{-nk}) = K - Ke^{-nk} \tag{7}$$

que es la ecuación (6) con las dos constantes iguales. Si sustituímos k por su valor, obtenemos

$$s_n = K - Ke^{-50n/TC} = K\left(1 - e^{-50n/TC}\right)$$

Para hallar n tal que el 99% del circulante es reemplazado, teniendo en cuenta que $K = TC$, hacemos $K(1 - e^{-nk}) = 0.99K$, o sea $1 - e^{-nk} = 0.99$.

Esto equivale a buscar n tal que $\frac{1}{100} = e^{-nk}$, o lo que es lo mismo,

$$e^{nk} = 100$$

de donde

$$n = \frac{\log(100)}{k} = \frac{TC}{50} log(100) = 921,23 \simeq 921$$

días (dos años y medio!).

Es claro que si en lugar de entrar diariamente a los bancos 50 millones del total (apenas el 5 por mil del total circulante) lo hiciera una proporción mayor, el tiempo de espera se reduciría. Si p.ej. entraran 100 millones por día a los bancos en lugar de 50, el tiempo hasta haber substituído el 99% del circulante sería la mitad del anterior (pruébelo!).

Asimismo si nuestro objetivo es el reemplazo del 90% del circulante viejo, entonces para cualquier k entre 0 y 1 el tiempo de espera será la mitad que para el caso 99% (pruébelo!).

Si queremos que el reemplazo al 99% tenga lugar en 30 días (tardar 30 veces menos que esos dos años y medio), cuánto dinero debería entrar diariamente a los bancos? Calcule dicha cantidad

Otra pregunta que nos podemos plantear es respecto a el tiempo mínimo que necesitaremos para efectuar el reemplazo de ese 99%. Llamemos k_{Max} a la mayor proporción posible de manejar por el sistema. En nuestro ejemplo sería el mayor porcentaje del total circulante que los bancos pueden manejar diariamente. Entonces

$$\frac{\log(100)}{k_{Max}} \leq n$$

Para el caso límite en que $k_{Max} \to 1$ (el sistema bancario recibe diariamente casi todo el circulante), tenemos $n \to \log(100) \simeq 4.605$, por lo que es imposible lograr cambiar el 99% del circulante en menos de 4 días.

4.2.1 Observaciones

Todo modelo es una simplificación de una realidad compleja. En ocasiones hay determinados supuestos o hipótesis que formulamos de manera inconsciente.

1. En este caso hemos dado por descontado que los 50 millones que al final de cada día quedan en los bancos, al otro día salen y se mezclan uniformemente con el resto del circulante, de modo que la proporción de billetes nuevos en el total al final del día n es $\frac{s_{n-1}}{TC}$, y por tanto la proporción de billetes viejos en el total es $1 - \frac{s_{n-1}}{TC}$ y en los 50 millones es $50\left(1 - \frac{s_{n-1}}{TC}\right)$.

2. Asimismo estamos suponiendo que la cantidad total de dinero a reemplazar es constante, siempre son $TC = 10.000$ millones, cuando es natural pensar que puede ingresar dinero desde fuera (exportamos algo) o salir dinero (importamos algo).

4.3 Diálisis

Los riñones filtran la sangre, separando substancias de desecho que son eliminadas en la orina. Supongamos un individuo cuyos riñones no funcionan bien. Periódicamente (por ejemplo una vez a la semana) dicho individuo deberá conectarse durante un cierto tiempo (medido en horas) a un dispositivo de diálisis, el cual filtra la sangre imitando el trabajo de los riñones.

La analogía con el ejemplo anterior de reemplazo de billetes es evidente, pero ahora la cantidad de substancias a eliminar no es constante, dado que el organismo del paciente produce continuamente nuevas substancias de desecho mientras está conectado a la máquina de diálisis.

Supongamos que por unidad de tiempo ingresa una cantidad constante D de substancias de desecho al torrente sanguíneo (que supondremos constante e igual a 5000 ml.).

Sea d_0 el total de substancias de desecho en sangre que tiene el paciente cuando se conecta al dializador. Supongamos que el dializador puede limpiar por completo una cantidad C de sangre por unidad de tiempo (en ml.). Entonces

$$d_1 = d_0 + D - C\frac{d_0}{5000} = d_0\left(1 - \frac{C}{5000}\right) + D$$

Una hora después, tendremos

$$d_2 = d_1 + D - C\frac{d_1}{5000} = d_1\left(1 - \frac{C}{5000}\right) + D$$

Sustituyendo d_1 obtenemos

$$d_2 = d_0\left(1 - \frac{C}{5000}\right)^2 + D\left[1 + \left(1 - \frac{C}{5000}\right)\right]$$

Es claro que

$$d_n = d_0\left(1 - \frac{C}{5000}\right)^n + D\sum_{j=0}^{n-1}\left(1 - \frac{C}{5000}\right)^j$$

Como

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(1 - \frac{C}{5000}\right)^j = \frac{5000}{C}\left[1 - \left(1 - \frac{C}{5000}\right)^n\right]$$

tenemos que

$$d_n = d_0\left(1-\frac{C}{5000}\right)^n + D\frac{5000}{C}\left[1-\left(1-\frac{C}{5000}\right)^n\right]$$

sacando factor común obtenemos

$$d_n = \left[d_0 - \frac{5000D}{C}\right]\left(1-\frac{C}{5000}\right)^n + \frac{5000D}{C}$$

Si llamamos $K_1 = \left[d_0 - \frac{5000D}{C}\right]$, $k = \frac{C}{5000}$ y $K_2 = \frac{5000D}{C}$ obtenemos

$$d_n = K_1(1-k)^n + K_2$$

Como el filtrado se hace continuamente, tendremos

$$d_n = K_1 e^{-nk} + K_2 \tag{8}$$

(aparece nuevamente la ecuación (6)) y deshaciendo los cambios de variable,

$$d_n = \left[d_0 - \frac{5000D}{C}\right] e^{-\frac{nC}{5000}} + \frac{5000D}{C}$$

4.3.1 Observaciones

1. La ecuación (8) nos dice que hay un piso igual a K_2, por lo que es razonable preguntarnos qué podemos hacer para que K_2 sea lo más pequeña posible. Como $K_2 = \frac{5000D}{C}$ y no controlamos D, lo que debemos hacer es incrementar C. Cuanto más sangre por unidad de tiempo pueda procesar nuestro filtro, menor será K_2.

2. Si tomamos $\alpha \in (0,1)$, el tiempo de espera hasta que $d_n = \alpha d_0$ es

$$n = \frac{1}{k}\log\left(\frac{K_1}{\alpha d_0 - K_2}\right)$$

(pruébelo!). Si tenemos en cuenta que el argumento del logaritmo debe ser positivo, obtenemos que $C > \frac{5000D}{\alpha d_0}$, la máquina debe tener una capacidad de filtrado mínima para que el modelo sea aplicable. Por ejemplo si $d_0 = 100$, $D = 2$ y $\alpha = 0.1$, obtenemos $C > 1000$, nuestra máquina debe filtrar al menos 1000 cc. de sangre por hora.

4.4 Desintegración Radioactiva

Existen elementos cuyos átomos son inestables (tienen un exceso de energía que deben perder para llegar a una configuración de mínima energía, o sea estable).

Por ejemplo cada átomo de Uranio tiene una pequeña probabilidad de perder energía mediante la emisión de partículas para terminar convertido en Plomo, el cual es estable. Dicha emisión de partículas es lo que se conoce como ***radioactividad***.

Como todos los átomos de Uranio tiene la misma chance de emitir partículas, de eso resulta que la cantidad de átomos de Uranio que emiten partículas en cada instante es proporcional a la cantidad de Uranio presente.

Tenemos por tanto un modelo exponencial del tipo ovillo de lana, donde la cantidad de Uranio decrece en el tiempo en forma proporcional a la cantidad existente, convirtiéndose en Plomo.

Si llamamos y_n a la cantidad de Uranio observada en tiempo n (habitualmente años), tendremos que

$$y_n = Ae^{-kn}$$

donde A, k son constantes y $k > 0$ (k depende del material en cuestión). Es inmediato que $y_0 = A$, de donde el modelo es

$$y_n = y_0 e^{-kn} \tag{9}$$

Observemos que según el modelo, y_n decrece hacia 0 cuando $n \to +\infty$, pero que nunca vale 0. Por tanto carece de sentido preguntarnos cuánto tiempo deberemos esperar para que p.ej. 1 mgr. de Uranio se convierta en 1 mgr. de Plomo.

Lo que sí nos podemos preguntar es cuánto tiempo hará falta para que la mitad del Uranio se convierta en Plomo. Este tiempo es lo que se conoce como ***vida media***.

Para hallar dicho tiempo, buscamos n tal que $y_0 e^{-kn} = \frac{1}{2} y_0$, o sea $e^{-kn} = \frac{1}{2}$. Despejando obtenemos

$$n = \frac{1}{k} \log(2)$$

Notemos que no depende de y_0. Para el Uranio 235 p.ej. este tiempo es de $7,038 \times 10^8$ años (unos 700 millones de años).

Este hecho es la base para un método de datación geológica. En una versión sencilla, si en una muestra de roca hallamos nódulos de Uranio/Plomo y suponemos que cuando la roca fue creada el nódulo era 100% Uranio, midiendo la proporción de Uranio respecto del Plomo podremos calcular cuanto tiempo ha pasado desde la formación de dicha roca.

Veamos como hallar el tiempo necesario para que el remanente sea una proporción $0 < \alpha < 1$ de la cantidad inicial.

Si $y_n = y_0 e^{-kn}$ y buscamos n tal que $y_n = y_0 e^{-kn} = \alpha y_0$, debemos buscar n tal que

$$e^{-kn} = \alpha$$

Esto nos da

$$n = \frac{1}{k} \log\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

El Uranio no es el único caso de elementos inestables que buscan estabilizarse mediante la emisión de partículas. En el caso del Carbono, la gran mayoría de los átomos de Carbono son estables, el Carbono 16. Pero cada tantos átomos de C-16 hay átomos inestables de C-14 (Carbono 14), los cuales se convierten en C-16 siguiendo el mismo modelo que el Uranio. En el caso del C-14 la vida media es de 5730 años, lo que lo vuelve una herramienta útil para datar material biológico de relativamente poca edad.

Los organismos vivos continuamente están intercambiando Carbono con el medio (el C-14 se convierte en C-16 pero ingresa nuevo C-14 al organismo), manteniendo una proporción C-14/C-16 estable. Al morir el organismo, el intercambio con el medio cesa y el C-14 atrapado en el cuerpo se va transformando en C-16.

Midiendo la tasa C-14/C-16 de los restos puede calcularse el tiempo transcurrido desde la muerte de dicho material.

4.5 Metabolización de sustancias

Cuando ingerimos p.ej. un medicamento, nuestro cuerpo comienza a metabolizarlo de modo tal que la cantidad de medicamento metabolizado es proporcional a la cantidad existente.

Al comienzo se metaboliza rápidamente, pero a medida que queda menos cantidad ésta demora más en metabolizarse.

Tenemos el mismo modelo exponencial decreciente de la desintegración radioactiva. De nuevo el modelo predice que siempre quedarán restos en nuestro sistema de cualquier medicina que hayamos ingerido en nuestra vida.

Por ello muchos medicamentos traen en la letra pequeña el tiempo de vida media en plasma. P. ej. para el ibuprofeno dicha vida media en plasma es de unas 2 horas.

4.6 Curvas de Aprendizaje

Un modelo utilizado por los psicólogos en sus estudios sobre cómo aprendemos establece que cada persona puede aprender algo hasta un cierto "techo", y que aprendemos en forma proporcional a lo que nos falta para llegar a nuestro techo. Esto es, al comienzo (cuando no sabemos nada respecto del tema o habilidad o tarea en cuestión) aprendemos rápidamente, pero a medida que sabemos más sobre lo que estamos aprendiendo nuestro aprendizaje es cada vez más lento.

Llamemos C_0 a nuestro conocimiento inicial en la tarea o habilidad o tema sobre el cual vamos a aprender, y M a nuestro techo en dicho tema. Supongamos que medimos el tiempo de entrenamiento en horas, entonces $C_1 = C_0 + k(M - C_0) = C_0(1-k) + kM$, $C_2 = C_1 + k(M - C_1) = C_1(1-k) + kM$, sustituyendo C_1 obtenemos

$$C_2 = C_0(1-k)^2 + kM[1 + (1-k)]$$

y en general

$$C_n = C_{n-1} + k(M - C_{n-1}) = C_n(1-k) + kM$$

sustituyendo y haciendo inducción obtenemos

$$C_n = C_0(1-k)^n + kM\sum_{j=0}^{n-1}(1-k)^j \tag{10}$$

Como $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}(1-k)^j = \frac{1-(1-k)^n}{k}$, sustituyendo en (10) y sacando factor común llegamos a

$$C_n = (C_0 - M)(1-k)^n + M \tag{11}$$

que es nuevamente la ecuación (4). Asumiendo que aprendemos a tiempo continuo, obtendremos

$$C_n = (C_0 - M)e^{-kn} + M \tag{12}$$