Calcule las siguientes integrales:

a)

$$\int_{-1}^{4} (t+1)(t-2)\ dt$$

b)

$$\int_{2}^{3} \frac{1}{2x+3}\ dx$$

c)

$$\int_{5}^{7} \sqrt{x-3}\ dx$$

a) $\int_{-1}^{4} \underbrace{(t+1)(t-2)}\, dt =$

$\int t^2 \underbrace{-2t + t}_{-t} - 2 \cdot dt$

$\left. \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 2t \right|_{-1}^{4}$

b) $\int_{2}^{3} \frac{1}{2x+3} dx \rightarrow u = 2x+3$

$du = 2\,dx \rightarrow \frac{du}{2} = dx$

$\frac{1}{2}\int_{7}^{9} \frac{1}{u}\, du = \left. \frac{1}{2} \ln(u) \right|_{7}^{9}$

$\frac{1}{2} \cdot \left[\ln(9) - \ln(7)\right]$

$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{9}{7}\right) =$

Calcule la derivada de las siguientes funciones respecto a la variable x:

a)

$$g(x) = ln(x^2)$$

b)

$$g(x) = sin(1 - \frac{1}{x})$$ $\cos(1-\frac{1}{x})\cdot(\frac{1}{x^2})$

c)

$$g(x) = e^{\sqrt{x-3}}$$

$g(x) = \ln(x^2)$ $\ln(x)$ $h(x) = x^2$

$$\frac{d\,g(h(x))}{dx} = \frac{d\,g(h(x))}{d\,h(x)} \cdot \frac{d\,h(x)}{dx}$$

$\frac{d\,g(h(x))}{d\,h(x)} \to \frac{1}{x^2}$, $\frac{d\,h(x)}{dx} \to 2x$

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$$

$$\ln(x^2) \simeq 2\ln(x)$$

derivo

$$\downarrow$$

$$\frac{2}{x}$$

Ejercicio 4

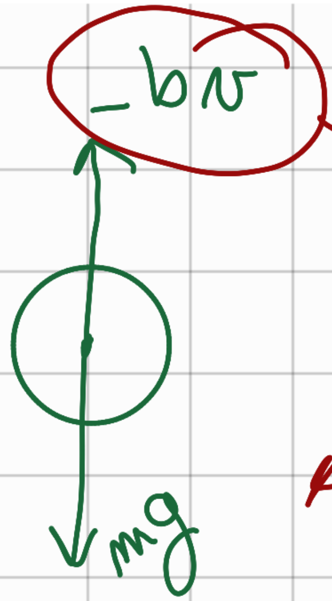
Un cuerpo de masa m se deja caer desde una altura muy grande H. Debido a la fricción con el aire, experimenta una fuerza de arrastre del tipo $\vec{F} = -b.\vec{v}$.

a) Determine la velocidad límite que alcanza el cuerpo.

b) Determine la velocidad en función del tiempo.

c) Determine la posición en función del tiempo.

a



$$m.\underset{\downarrow \atop \frac{dv}{dt}}{a} = mg - bv$$

$$m.\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow mg - bv = 0$$

$$\boxed{v_{lim} = \frac{mg}{b}}$$

b

$$\underbrace{m\frac{dv}{dt}}_{O-P} = \underbrace{mg}_{O-H} - bv \quad \begin{cases} \to PyH \\ \to \text{Integral} \end{cases}$$

PyH

sol Particular: $\quad v_p = \dfrac{mg}{b}$

sol Homogenea: $\quad \boxed{m\dfrac{dv}{dt} = -bv}$

$\downarrow$

$dt = 0$

+

$$\int_A^v \frac{dv}{v} = \int_0^t -\frac{b}{m}\, dt$$

parámetro que uso al final con las condiciones iniciales

$\ln(v) - \ln(A) = \ln\left(\frac{v}{A}\right)$

$$\ln\left(\frac{v(t)}{A}\right) = -\frac{b}{m} t$$

$\hookrightarrow v_H(t) = A e^{-\frac{b}{m} t}$

sol general

$$\underbrace{\text{sol par} + \text{sol hom}}_{\text{aplicar las cond. iniciales}}$$

$$v(t) = \frac{mg}{b} + A e^{-\frac{b}{m} t}$$

$\hookrightarrow$ CI: $t=0 \quad v=0$

$$0 = \frac{mg}{b} + A \rightarrow A = -\frac{mg}{b}$$

$$v(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m} t}\right)$$

Integral

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv$$

$$\frac{dv}{dt} = \left(g - \frac{b}{m}v\right)1 \Rightarrow \int_0^v \frac{dv}{\left(g - \frac{b}{m}v\right)} = \int_0^t dt$$

$$\left.\begin{aligned} u &= g - \frac{b}{m}v \\ du &= -\frac{b}{m}dv \end{aligned}\right\} \int_g^{g-\frac{b}{m}v} -\frac{m}{b}\frac{du}{u} = t$$

$$-\frac{m}{b}du = dv$$

$$\int_g^{g-\frac{b}{m}v} \frac{du}{u} = -\frac{b}{m}t$$

$$\ln\left(\frac{g - \frac{b}{m}v}{g}\right) = -\frac{b}{m}t \Rightarrow \frac{g - \frac{b}{m}v}{g} = e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$g - \frac{b}{m}v = g \cdot e^{-\frac{b}{m}t} \Rightarrow -\frac{b}{m}v = -ge^{-\frac{b}{m}t} + g$$

$$v(t) = \frac{gm}{b} - \frac{gm}{b}e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$v(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

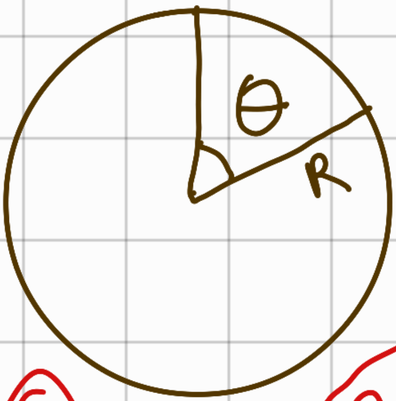
$$v(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

Ejercicio 2

a) Calcule el área de un sector de círculo de radio R y ángulo al centro θ.

b) Calcule la masa de un disco de radio R cuya densidad de masa por unidad de área σ es constante.

c) Calcule la masa de un disco de radio R cuya densidad de masa por unidad de área es $\sigma(r) = k(1 + \frac{r^2}{R^2})$.

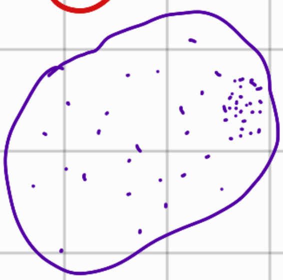


$\pi R^2 \sim 2\pi \sim 360$

¿A? $\sim \theta$

$\hookrightarrow A_\theta = \dfrac{\theta R^2}{2}$

(b)

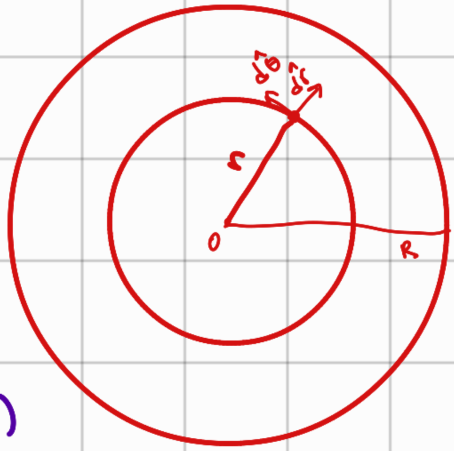


$$\rho_{vol} = \frac{m}{V} \qquad \sigma_{sup} = \frac{m}{A} \qquad \lambda_{lin} = \frac{m}{L}$$

$$\sigma = \frac{dm}{dA} \rightarrow \sigma \int dA = \int dm$$

$$\sigma \cdot \pi R^2 = m$$

$$\sigma = k\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{dm}{dA}$$



$$\int_0^R\int_0^{2\pi} \overbrace{k\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right)}^{\sigma} \underbrace{dA}_{r\,dr\,d\theta} = dm$$

$$2\pi k \int_0^R \left(1+\frac{r^2}{R^2}\right) . r\,dr$$

$$\int_0^R \left(r+\frac{r^3}{R^2}\right)dr = \frac{r^2}{2}+\frac{r^4}{4.R^2}\Big|_0^R = \frac{R^2}{2}+\frac{\cancel{R^4}^{\,2}}{4\cancel{R^2}}$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)R^2$$

$$\underbrace{\frac{2}{4}+\frac{1}{4}}_{\frac{3}{4}R^2}$$

$$M = \pi k \frac{3}{2} R^2$$