Soluciones Primer Parcial Física 2 - 2021 Tecnólogo Mecánico

Ejercicio 1

Parte a)

Aplicando la Ley de Gauss a una superficie esférica concéntrica con la esfera conductora obtenemos:

$$4\pi . r^2 . E = \frac{Q}{K . \varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi . K . \varepsilon_0 . r^2}$$

Como $Q > 0$ el campo eléctrico será radial y saliente.

Parte b)

En forma análoga:

$$4\pi . r^2 . E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi . \varepsilon_0 . r^2}$$

En la misma dirección y sentido que la parte anterior.

Parte c)

$$V(a) = -\int_{\infty}^{a} \vec{E} . d\vec{l} = -\int_{\infty}^{b} \frac{Q}{4\pi . \varepsilon_0 . r^2}\, dr - \int_{b}^{a} \frac{Q}{4\pi . K . \varepsilon_0 . r^2}$$

$$V(a) = \frac{Q}{4\pi . \varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{K . a} - \frac{1}{K . b}\right)$$

Finalmente, calculamos la capacitancia:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi . \varepsilon_0 \frac{1}{\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{K . a} - \frac{1}{K . b}\right)} = 4\pi . \varepsilon_0 . \left(\frac{1}{\frac{K . a + b - a}{K . a . b}}\right)$$

$$C = 4\pi . \varepsilon_0 . \left(\frac{K . a . b}{K . a + b - a}\right)$$

Ejercicio 2

Parte a)

Queremos calcular el campo eléctrico en un punto Q ubicado a una distancia x de O. Para ello debemos considerar los aportes de cada tramo infinitesimal de varilla. Sea z la coordenada que utilizaremos para recorrer la varilla y dz la longitud de los tramos infinitesimales de varilla. En esta nomenclatura $\lambda = a.z$.

$$dE = \frac{k.dq}{r^2}$$

$$dE = \frac{k.\lambda.dz}{(x-z)^2}$$

$$dE = \frac{k.a.z.dz}{(x-z)^2}$$

Debemos integrar la expresión anterior entre $z = 0$ y $z = L$ para obtener el campo eléctrico en Q.

$$E(x) = \int_0^L \frac{k.a.z.dz}{(x-z)^2}$$

$$E(x) = k.a\int_0^L \left(\frac{x}{(x-z)^2} + \frac{1}{z-x}\right) dz$$

$$E(x) = k.a\left(x\int_0^L \frac{1}{(x-z)^2}dz + \int_0^L \frac{1}{z-x}dz\right)$$

Cambios de variable:

$$u = z - x$$

$$du = dz$$

$$s = x - z$$

$$ds = -dz$$

$$E(x) = k.a\left(x\int_0^L \frac{1}{(x-z)^2}dz + \int_0^L \frac{1}{z-x}dz\right)$$

$$E(x) = k.a\left(x\int -\frac{1}{s^2}ds + \int \frac{1}{u}du\right)$$

$$E(x) = k.a\left(\frac{x}{s} + \ln u\right)$$

$$E(x) = k.a\left(\frac{x}{x-z} + \ln(z-x)\right)$$

$$E(x) = k.a\left(\frac{x}{x-L} - 1 + \ln\left(\frac{L-x}{x}\right)\right)$$

Parte b)

$$dV = \frac{k.dq}{r}$$

$$dV = \frac{k.\lambda.dz}{(x-z)}$$

$$dV = \frac{k.a.z.dz}{(x-z)}$$

$$V(x) = \int_0^L \frac{k.a.z.dz}{(x-z)} + C$$

$$V(x) = k.a\int_0^L \frac{x}{x-z} - 1\,dz + C$$

$$V(x) = k.a\left(-x.\ln\left(\frac{x-L}{x}\right) - L\right) + C$$

$$V(\infty) = k.a(-L) + C$$

$$V(\infty) = -k.a.L + C = 0$$

$$C = k.a.L$$

$$V(x) = k.a.x.\ln\left(\frac{x}{x-L}\right)$$

Parte c)

$$\overrightarrow{E_P} = \overrightarrow{E_{Px}} + \overrightarrow{E_{Py}}$$

Tomemos $L' = L/2$

$$dE_{Px} = dE.\cos\theta$$

$$dE = \frac{kq}{r^2} = \frac{k.a.x}{r^2}$$

$$\cos\theta = \frac{L'}{r}$$

$$r = \left(x^2 + L'^2\right)^{1/2}$$

$$E_{Px} = \int_0^L \frac{k.a.x.L'}{(x^2 + L'^2)^{3/2}}$$

$$dE_{Py} = dE.\sin\theta$$

$$dE = \frac{kq}{r^2} = \frac{k.a.x}{r^2}$$

$$\sin\theta = \frac{x}{r}$$

$$r = \left(x^2 + L'^2\right)^{1/2}$$

$$E_{Py} = \int_0^L \frac{k.a.x^2}{(x^2 + L'^2)^{3/2}}$$

Ejercicio 3

Parte a)

Calculamos la Capacitancia equivalente:

$$C_{eq} = K_1 C_1 + C_2$$

Calculamos la Resistencia equivalente*:*

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + r$$

Planteamos las Ley de las Mallas en el circuito equivalente*:*

$$V = i.R_{eq} + \frac{q}{C_{eq}}$$

De resolver la ecuación diferencial anterior se obtiene*:*

$$q(t) = C_{eq}.V.\left(1 - e^{-\frac{t}{R_{eq}C_{eq}}}\right)$$

Parte b)

$$P = V.i = R_{eq}.i^2$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C_{eq}.V.\left(\frac{1}{R_{eq}C_{eq}}e^{-\frac{t}{R_{eq}C_{eq}}}\right) = \frac{V}{R_{eq}}e^{-\frac{t}{R_{eq}C_{eq}}}$$

$$P = R_{eq}.\frac{V^2}{R_{eq}^2}e^{-\frac{2t}{R_{eq}C_{eq}}}$$

$$P = \frac{V^2}{R_{eq}}e^{-\frac{2t}{R_{eq}C_{eq}}}$$

Parte c)

$$U = \frac{q^2}{2C_{eq}}$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2C_{eq}}.2.q.q' = \frac{1}{2C_{eq}}.2.C_{eq}.V.\left(1 - e^{-\frac{t}{R_{eq}C_{eq}}}\right).\frac{V}{R_{eq}}e^{-\frac{t}{R_{eq}C_{eq}}}$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{V^2}{R_{eq}}\left(\left(1 - e^{-\frac{t}{R_{eq}C_{eq}}}\right)e^{-\frac{t}{R_{eq}C_{eq}}}\right)$$