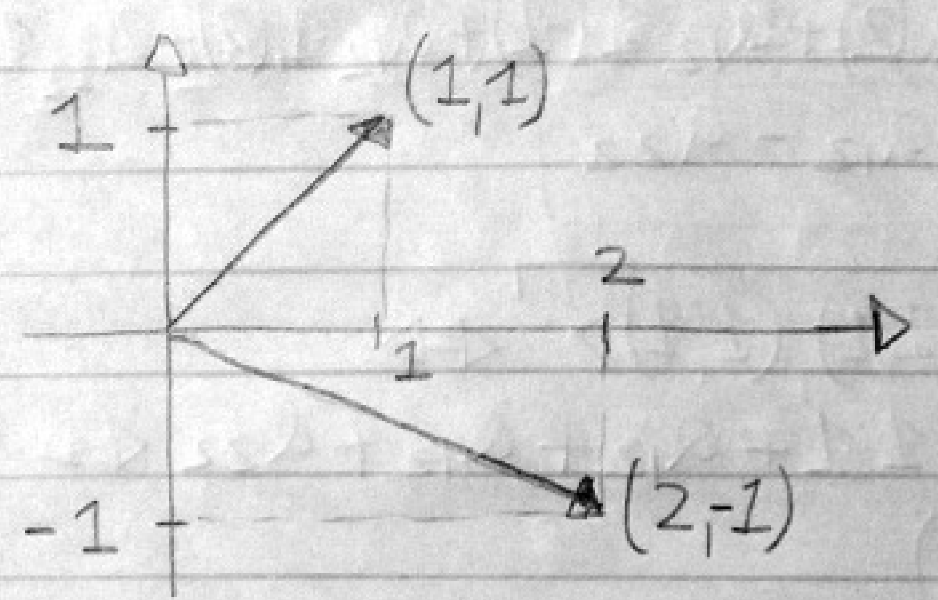
Práctico 5

Ejercicio 11 - 1 $V = \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Nos dan $B = \{(1,1), (2,-1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$.



El producto interno usual en $\mathbb{R}^2$ es:

$<(x_1, x_2), (y_1, y_2)> = x_1 y_1 + x_2 y_2$

Con este PI se tiene:

I $<(1,1), (2,-1)> = 1.2 + 1.(-1) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ los vectores de la base no son ortogonales con el PI usual.

II $\|(1,1)\| = \sqrt{<(1,1),(1,1)>} = \sqrt{2}$ y

$\|(2,-1)\| = \sqrt{<(2,-1),(2,-1)>} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ $\Big\} \Rightarrow$

los vectores no tienen tamaño 1 al medir con la norma inducida por el PI usual.

Nos piden hallar un PI en $\mathbb{R}^2$ (distinto al usual) tal que B sea ortonormal con ese nuevo PI. Es decir, tal que: I $<(1,1), (2,-1)> = 0$ y

II $\|(1,1)\| = 1$ y $\|(2,-1)\| = 1$.

Por el $\boxed{\text{ejercicio 4}}$, un PI genérico en $\mathbb{R}^2$ es de la forma:

$<(x_1, x_2), (y_1, y_2)> = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2$.

Donde los a_{ij} son números reales a determinar, que deben cumplir además: $\begin{cases} a_{21} = a_{12} \text{ y} \\ a_{11} > 0, \ a_{22} > 0. \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow <(x_1, x_2), (y_1, y_2)> = \underbrace{a_{11}}_{>0} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{12} x_2 y_1 + \underbrace{a_{22}}_{>0} x_2 y_2$

Para hallar los a_{ij} imponemos que B sea ortonormal:

$$\text{I}\quad \langle \underbrace{(1,1)}_{x_1\ x_2}, \overset{y_1\ y_2}{(2,-1)} \rangle = 0 \iff 0 = a_{11}1.(2) + a_{12}1(-1) + a_{12}1(2) + a_{22}1(-1)$$

$$\iff \boxed{0 = 2a_{11} + a_{12} - a_{22}}$$

$$\text{II}\ \text{i}\quad \|(1,1)\| = 1 \iff 1 = \sqrt{\langle (1,1),(1,1) \rangle} \iff$$

$$\iff 1 = \langle (1,1),(1,1) \rangle = a_{11}1.1 + a_{12} + a_{12} + a_{22} \iff$$

$$\boxed{1 = a_{11} + 2a_{12} + a_{22}}$$

$$\text{ii}\quad \|(2,-1)\| = 1 \iff 1 = \sqrt{\langle (2,-1),(2,-1) \rangle} \iff$$

$$\iff 1 = \langle \underbrace{(2,-1)}_{x_1\ x_2}, \underbrace{(2,-1)}_{y_1\ y_2} \rangle = a_{11}2.2 + a_{12}2(-1) + a_{12}(-1)2 + a_{22}(-1)(-1)$$

$$\iff \boxed{1 = 4a_{11} - 4a_{12} + a_{22}}$$

Se obtiene un sistema de tres ecuaciones lineales con 3 incógnitas a_{11}, a_{12} y a_{22}, donde debe ser $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{I} + \text{i}:\ 1 = 3a_{11} + 3a_{12} \\ \text{I} + \text{ii}:\ 1 = 6a_{11} - 3a_{12} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{sumando}:\ 2 = 9a_{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{11} = \frac{2}{9}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = 6\left(\frac{2}{9}\right) - 3a_{12} \Rightarrow 3a_{12} = \frac{4}{3} - 1 \Rightarrow \boxed{a_{12} = \frac{1}{9}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{en I}:\ a_{22} = 2\left(\frac{2}{9}\right) + \frac{1}{9} \Rightarrow \boxed{a_{22} = \frac{5}{9}}$$

∴ el PI que hace que B sea ortonormal es:

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2) \rangle = \frac{2}{9}x_1y_1 + \frac{1}{9}x_1y_2 + \frac{1}{9}x_2y_1 + \frac{5}{9}x_2y_2.$$

<u>Otra forma de hacerlo</u> (sin usar el ejercicio 4)

Como $B = \{(1,1),(2,-1)\}$ es base de $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ existen coeficientes α_1, α_2 y β_1, β_2 $\boxed{\text{reales}}$, tales que:

$$\left.\begin{array}{l}(x_1,x_2) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(2,-1) \text{ y} \\ (y_1,y_2) = \beta_1(1,1) + \beta_2(2,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow$$ Para cualquier PI de $\mathbb{R}^2$ se tiene:

propiedades de un PI

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = \langle \alpha_1(1,1)+\alpha_2(2,-1), \beta_1(1,1)+\beta_2(2,-1)\rangle =$$

$$= \langle \alpha_1(1,1), \beta_1(1,1)+\beta_2(2,-1)\rangle + \langle \alpha_2(2,-1), \beta_1(1,1)+\beta_2(2,-1)\rangle =$$

$$= \left(\langle \alpha_1(1,1), \beta_1(1,1)\rangle + \langle \alpha_1(1,1), \beta_2(2,-1)\rangle\right) +$$

$$\left(\langle \alpha_2(2,-1), \beta_1(1,1)\rangle + \langle \alpha_2(2,-1), \beta_2(2,-1)\rangle\right) =$$

β_1 y $\beta_2 \in \mathbb{R}$

$$= \alpha_1\overline{\beta_1}\langle (1,1),(1,1)\rangle + \alpha_1\overline{\beta_2}\langle (1,1),(2,-1)\rangle +$$

$$+ \alpha_2\overline{\beta_1}\langle (2,-1),(1,1)\rangle + \alpha_2\overline{\beta_2}\langle (2,-1),(2,-1)\rangle =$$

$$= \alpha_1\beta_1\underbrace{\langle (1,1),(1,1)\rangle}_{=1} + \alpha_1\beta_2\underbrace{\langle (1,1),(2,-1)\rangle}_{=0} + \alpha_2\beta_1\underbrace{\langle (2,-1),(1,1)\rangle}_{=0} +$$

$$+ \alpha_2\beta_2\underbrace{\langle (2,-1),(2,-1)\rangle}_{=1} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$$

Imponiendo las condiciones para que B sea ortonormal.

Resta hallar los coeficientes α_1, α_2 y β_1, β_2 que permiten escribir cada vector genérico (x_1,x_2) y (y_1,y_2) como C.L. de la base B.

$\Rightarrow$

I) Dado $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ genérico,

busco $\alpha_1, \alpha_2 \,/\, (x_1, x_2) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(2,-1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2) = (\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 & \text{(i)} \\ x_2 = \alpha_1 - \alpha_2 & \text{(ii)} \end{cases}$$

En este sistema las incógnitas son α_1 y α_2.

$$\text{(i)} - \text{(ii)}: \; x_1 - x_2 = 3\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{x_1 - x_2}{3}$$

$$\text{(i)} + 2\text{(ii)}: \; x_1 + 2x_2 = 3\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{x_1 + 2x_2}{3}$$

De igual forma se obtiene: $\beta_1 = \dfrac{y_1 + 2y_2}{3}$ y

$\beta_2 = \dfrac{y_1 - y_2}{3}$. Reemplazando en la expresión obtenida para el PI, se tiene:

$$<(x_1, x_2), (y_1, y_2)> = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 =$$

$$= \left(\frac{x_1 + 2x_2}{3}\right)\left(\frac{y_1 + 2y_2}{3}\right) + \left(\frac{x_1 - x_2}{3}\right)\left(\frac{y_1 - y_2}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2}{9}\right) + \left(\frac{x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2}{9}\right) =$$

$$= \frac{2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 5x_2y_2}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow <(x_1, x_2), (y_1, y_2)> = \frac{2}{9}x_1y_1 + \frac{1}{9}x_1y_2 + \frac{1}{9}x_2y_1 + \frac{5}{9}x_2y_2$$

Mismo resultado que el obtenido usando el ejercicio 4.