

# CALCULO I

## Repaso de I.M.S.

1. Simplifica las siguientes expresiones:

(a)  $\left(\frac{8x^3y^{1/3}}{y^{2/3}}\right)^{-3} \left(\frac{y^{-1/3}}{2x^2}\right)^{-6}$

(b)  $\frac{(9st)^{3/2}}{(27s^3t^{-4})^{2/3}}$

(c)  $\frac{3 + \frac{6}{x-2}}{x-3 - \frac{6}{x-2}}$

(d)  $\frac{1 - \frac{1}{x-a}}{x-1 - \frac{a}{x-a}}$

(e)  $\frac{8 + \frac{3}{x-1} - \frac{7}{x+3}}{\frac{1}{x-1} + \frac{7}{x+3}}$

2. Factoriza completamente las siguientes expresiones:

(a)  $a(x-y) + (a-1)(y-x)$

(b)  $(x-1)^{7/2} - (x-1)^{3/2}$

(c)  $(a^2 + 2a)^2 - 2(a^2 + 2a) - 3$

(d)  $y^3 - 3y^2 - 4(y-3)$

3. Encuentra todas las soluciones de:

(a)  $x + 3 = \sqrt{4x + 17}$

(b)  $\frac{12}{x-2} = \frac{3}{x-1} - 2$

(c)  $\left|\frac{x-3}{x+2}\right| = 1$

(d)  $2|x-1| = 2 + |2x-4|$

4. Resuelve las siguientes desigualdades y expresa la solución en términos de intervalos:

(a)  $3x + 28 < 4(x+2)^2$

(b)  $\frac{2}{x^2 - 16} \leq \frac{1}{x+4} - \frac{2}{x-4}$

(c)  $|x-3| < (x-5)^2$

(d)  $3x - 1 \leq |1 - 2x|$

(e)  $\frac{-2}{3x-4} \geq 3$

(f)  $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-3} > 0$

(g)  $-2 < x(1-6x)$

(h)  $\left|\frac{x+2}{4-x}\right| < 2$

(i)  $|2-3x| < x$

(j)  $4x + 2 \leq |2 - |-2x + 4||$

5. Encuentra una ecuación para la recta determinada por las siguientes condiciones. Ilustra con una gráfica.

(a) Paralela a la recta  $2x - 3y = 6$  y corta al eje  $X$  en  $x = -4$

(b) Perpendicular a la recta  $x = 2y - 4$  y contiene al punto  $(3, -2)$

(c) Pasa por el origen  $(0, 0)$  y contiene al punto medio del segmento determinado por  $(3, -1)$  y  $(1, 3)$

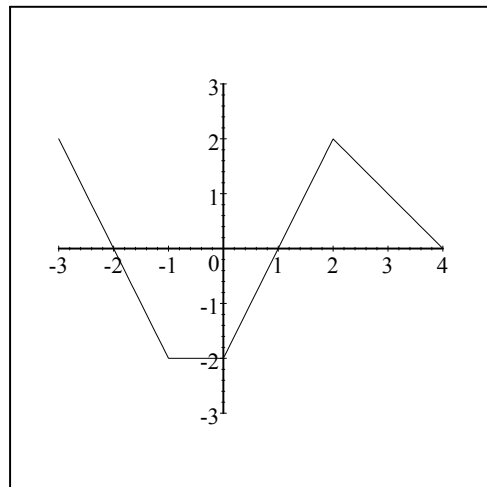
6. Dada la función  $f(x) = \frac{x+2}{x-6}$  resuelve las siguientes preguntas:

(a) ¿Alguno de los puntos  $(4, -3)$ ,  $(-2, 1)$ ,  $(6, 0)$  se encuentran sobre su gráfica?

(b) ¿Para qué valor de  $x$  se tiene que  $f(x) = \frac{2}{3}$ ?

(c) ¿En qué intervalos de valores de  $x$  es cierto que  $f(x) \geq x - 3$ ?

7. Si la siguiente es la gráfica de la función  $g(x)$  con  $x \in [-3, 4]$



- (a) Determina el rango de  $g(x)$
- (b) Dibuja la gráfica de  $g(x - 2)$
- (c) Dibuja la gráfica de  $g(x) + 2$
- (d) Dibuja la gráfica de  $g(x - 1) + 1$
- (e) Dibuja la gráfica de  $|g(x)|$
- (f) Dibuja la gráfica de  $1 - |g(x)|$

8. Determina el dominio de las siguientes funciones:

- (a)  $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$
- (b)  $g(x) = \frac{x-2}{6-x-x^2}$
- (c)  $h(x) = \frac{x}{1 - \frac{x}{1-x}}$
- (d)  $f(x) = \frac{x^{-1}}{x^2-2}$
- (e)  $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6}$

9. Dadas:  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ,  $g(x) = \sqrt{x+2}$ ,  
 $h(x) = 2 - 3x$

- (a) Calcula los dominios y rangos de  $f(x)$ ,  $g(x)$ , y  $h(x)$
- (b) Obtén expresiones simplificadas para las siguientes composiciones y calcula los dominios:

- (a)  $[g \circ f](x)$
- (b)  $[f \circ h](x)$
- (c)  $[f \circ f](x)$
- (d)  $[f \circ g](x)$
- (e)  $[g \circ f \circ h](x)$

- (c) Obtén expresiones simplificadas para las siguientes operaciones y calcula los dominios:

- (a)  $f(x) + \frac{1}{g(x)^2}$
- (b)  $\frac{f(x)}{h(x)}$
- (c)  $g(x) \left( \frac{1}{f(x)} - h(x) \right)$

10. Dadas las funciones:  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{x}}$  y  $h(x) = |x|$

- (a) Calcula el dominio de  $f(x)$  y el de  $[f \circ h](x) = f(h(x))$
- (b) Encuentra una expresión simplificada para  $f(x - 4)$

11. Las funciones siguientes se obtienen de funciones conocidas, cuyas gráficas deben ser familiares, usando transformaciones de tipo traslación o escalamiento. Ilustra en una misma gráfica a la función conocida y a la función transformada.

- (a)  $f(x) = |x + 3| - 2$
- (b)  $g(x) = \frac{1}{2} \left( (x+1)^2 - 4 \right)$
- (c)  $h(x) = \frac{1}{x+2} - 1$
- (d)  $p(x) = 2(\sqrt{x+2} + 1)$

12. Usa la técnica de completar el cuadrado para trazar las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas. Exhibe los cortes con los ejes y los máximos o mínimos:

- (a)  $f(x) = 3x^2 + 12x - 36$
- (b)  $f(x) = -4x^2 + 24x - 27$
- (c)  $f(x) = 2x^2 + 4x + 10$

13. Las siguientes funciones polinomiales tienen un cero en  $x = c$ , es decir  $q(c) = 0$ . Usa el proceso de división para encontrar las otras raíces y factorizar completamente el polinomio.

- (a)  $q(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$ ,  $c = -2$
- (b)  $q(x) = x^5 - 8x^3 + 16x - 3x^4 + 24x^2 - 48$ ,  
 $c = 3$
- (c)  $q(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$ ,  $c = -1$

14. Las gráficas de las siguientes funciones racionales se obtienen por transformaciones simples de las de  $f(x) = \pm \frac{1}{x}$  ó  $f(x) = \pm \frac{1}{x^2}$ . Haz las manipulaciones necesarias y esboza la gráfica.

$$(a) r(x) = \frac{2x+7}{x+3}$$

$$(b) r(x) = \frac{x-3}{x-2}$$

$$(c) r(x) = \frac{2x^2+4x+3}{(x+1)^2}$$

$$(d) r(x) = \frac{2x^2+5x-3}{x^2+4x+3}$$

15. Las siguientes funciones  $f(x)$  son todas uno a uno. Encuentra la expresión para la inversa  $f^{-1}(x)$  y verifica que  $f(f^{-1}(x)) = x$  y que  $f^{-1}(f(x)) = x$ .

$$(a) f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$$

$$(b) f(x) = 4 - \frac{2}{x}$$

16. Dada la información siguiente, encuentra los valores de todas las restantes funciones trigonométricas de  $\theta$ :

$$(a) \operatorname{sen} \theta = -\frac{4}{5}, \cos \theta > 0$$

$$(b) \operatorname{csc} \theta = -\frac{5}{3}, \cot \theta < 0$$

$$(c) \tan \theta = \frac{1}{3}, \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

$$(d) \cos \theta = \frac{12}{13}, \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$$

17. Dibuja la gráfica de las siguientes ecuaciones en el intervalo de  $x$  dado:

$$(a) y = \operatorname{sen}(x) - 1, x \in [0, 2\pi]$$

$$(b) y = -2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), x \in [-\pi, \pi]$$

$$(c) y = \operatorname{sen}(2x), x \in [0, 2\pi]$$

$$(d) y = \cos(2x - \pi), x \in [-\pi, \pi]$$

$$(e) y = \tan(x - \pi), x \in [-\pi, \pi]$$

$$(f) y = \sec\left(\frac{x}{2}\right), x \in [-\pi, \pi]$$

18. Establece las siguientes identidades. Trabaja con uno solo de los lados y usa tus definiciones e identidades conocidas hasta que llegues a obtener el otro lado.

$$(a) \frac{\cos(a-b)}{\operatorname{sen}(a)\cos(b)} = \cot(a) + \tan(b)$$

$$(b) \tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

$$(c) \frac{\cos(2a)}{1 + \operatorname{sen}(2a)} = \frac{\cot(a) - 1}{\cot(a) + 1}$$

$$(d) \tan\left(\frac{a}{2}\right) = \operatorname{csc}(a) - \cot(a)$$

$$(e) \cot\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos(a)}{\operatorname{sen}(a)}$$

$$(f) \operatorname{csc}(2a) = \frac{1}{2} \sec(a) \operatorname{csc}(a)$$

$$(g) \sec^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{2}{1 + \cos(a)}$$

19. Sin usar calculadora, encuentra el valor de las siguientes expresiones. Hint: los ángulos se pueden expresar en términos de sumas, diferencias o múltiplos de ángulos conocidos, es decir  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  y  $\frac{\pi}{6}$ .

$$(a) \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{8}\right)$$

$$(b) \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$(c) \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$(d) \sec\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$