Soluciones del examen de Variable Compleja 25/07/2022.

Ejercicio 1

1. El denominador se anula en $z_1 = e^{i\pi/4}, z_2 = e^{i3\pi/4}, z_3 = e^{i5\pi/4}, z_4 = e^{i7\pi/4}$. En el resto de puntos la función es holomorfa. En estos puntos, es claro que $\lim_{z\to z_i} f(z) = \infty$ y por lo tanto son polos. Además

$$\lim_{z\to z_i}(z-z_i)f(z) = \lim_{z\to z_i}\frac{(z-z_i)}{1+z^4} = \lim_{z\to z_i}\frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4z_i^3} \neq 0$$

de esto se deduce que son polos de orden 1 y que $\mathrm{Res}(z_i) = 1/4z_i^3$.

2. Notar que la curva da una vuelta entorno a z_1 y z_2 en sentido antihorario. Entonces, por el teorema de los residuos tenemos que

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\mathrm{Res}(z_1) + 2\pi i\mathrm{Res}(z_2) = 2\pi i\left(\frac{1}{4e^{i3\pi/4}} + \frac{1}{4e^{i9\pi/4}}\right) = \frac{\pi}{2}i(-\sqrt{2}i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

3. Notar que

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\sqrt{2}} &= \int_{\gamma_R}\frac{1}{1+z^4}\,dz = \int_{[-R,R]}\frac{1}{1+z^4}\,dz + \int_{S_R}\frac{1}{1+z^4}\,dz\\ &= \int_{-R}^{R}\frac{1}{1+x^4}\,dx + \int_{S_R}\frac{1}{1+z^4}\,dz\end{aligned}$$

ahora como $\lim_{z\to\infty}\frac{z}{1+z^4} = 0$ se sigue que el último sumando tiende a 0 cuando $R\to\infty$. Entonces tomando límite en R en la igualdad anterior se obtiene

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}\,dx$$

Ejercicio 2

1. Una función es holomorfa en Ω si y sólo si u y v son diferenciables y además se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\partial_x u = \partial_y v, \partial_y u = -\partial_x v$.

2. Las funciones u y v son $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$. Se sigue que no se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y por lo tanto f no es holomorfa.

3. Sí es holomorfa, una forma de chequearlo es usar las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Otra es notar que en este dominio el logartimo es continuo, y es la inversa de la exponencial e^z (cuya derivada no se anula).

4. Sí lo es, de hecho $\overline{\mathrm{Log}(\overline{z})} = \log(|x|) - i\mathrm{Arg}(\overline{z})$ pero como el argumento es en $(0,2\pi)$ se tiene que $\mathrm{Arg}(\overline{z}) = 2\pi - \mathrm{Arg}(z)$. Entonces $\overline{\mathrm{Log}(\overline{z})} = \mathrm{Log}(|x|) + i\mathrm{Arg(z)} - 2\pi i = Log(z) - 2\pi i$ por lo tanto es holomorfa.

Ejercicio 3 El logaritmo Log que describe la letra es $Log(z) = log(|z|) + iArg_{(-\pi/2,3\pi/2)}(z)$. Con esto en cuenta procedemos a hacer las cuentas.

1.

$$z^z = e^{zLog(z)} = e^{(x+iy)(log(|x|)+iArg_{(-\pi/2,3\pi/2)}(z))} = e^{xlog(x)-yArg_{(-\pi/2,3\pi/2)}(z)}e^{i(ylog(|x|)+xArg_{(-\pi/2,3\pi/2)}(z))}$$

Ahora

$$e^{i(ylog(|x|)+xArg_{(-\pi/2,3\pi/2)}(z))} = \cos\Big(ylog(|x|)+xArg_{(-\pi/2,3\pi/2)}(z)\Big)+i\sin\Big(ylog(|x|)+xArg_{(-\pi/2,3\pi/2)}(z)\Big)$$

por otro lado $e^{xlog(x)-yArg_{(-\pi/2,3\pi/2)}(z)}$ es un número real por lo tanto:

$$\begin{aligned}\text{Re}(z^z) =& e^{xlog(x)-yArg_{(-\pi/2,3\pi/2)}(z)}\cos\Big(ylog(|x|)+xArg_{(-\pi/2,3\pi/2)}(z)\Big)\\ \text{Im}(z^z) =& e^{xlog(x)-yArg_{(-\pi/2,3\pi/2)}(z)}\sin\Big(ylog(|x|)+xArg_{(-\pi/2,3\pi/2)}(z)\Big)\end{aligned}$$

2. Para los reales positivos se tiene $y=0$ y $Arg_{(-\pi/2,3\pi/2)}(z)=0$. Entonces $x^x=e^{xlog(x)}$. Para los reales negativos se tiene $y=0$ y $Arg_{(-\pi/2,3\pi/2)}(z)=\pi$, por lo tanto $x^x=e^{xlog(|x|)}e^{i\pi x}$.

3. $(-1)^{-1}=e^0e^{i\pi(-1)}=-1$. Por otro lado $i^i=e^{iLog(i)}=e^{i(log(1)+iArg(i))}=e^{-Arg(i)}=e^{-\pi/2}$.

Ejercicio 4

1. Como $\lim_{z\to 0} zf(z)\neq 0$ existe y es distinto de cero se sigue que f tiene un polo de orden 1 en $z=0$. Por otro lado, el hecho de que $\lim_{z\to i}(z-i)^2f(z)=A\neq 0$ nos dice que f tiene un polo de orden 2 en $z=i$. Para calcular el residuo, usamos el teorema de los residuos el cual nos dice
$$2\pi iB=\int_\gamma f(z)\ dz=2\pi iRes(i)$$
por lo tanto $Res(i)=B$.

   Respecto a la pregunta, no, no es posible calcular el residuo de f en $z=0$ con los datos dados. Una prueba de esto es que si $f(z)$ es una función satisfaciendo los datos de la letra entonces la función $g(z)=f(z)+\frac{1}{z}$ también los satisface. Sin embargo g y f tienen distinto residuo en $z=0$.

2. Se tiene que $\lim_{z\to i}(z-i)^2g(z)=\lim_{z\to i}(z-i)^2zf(z)=i\lim_{z\to i}(z-i)^2f(z)=iA\neq 0$ por lo tanto el polo es de orden 2. Para calcular el residuo, recordar que por ser de orden 2 tenemos
$$\text{Res}_g(i)=\lim_{z\to i}\left((z-i)^2zf(z)\right)'=\lim_{z\to i}z\left((z-i)^2f(z)\right)'+\lim_{z\to i}(z-i)^2f(z)=iB+A$$

3. La función $zf(z)$ tiene una singularidad evitable en $z=0$ y un polo de orden 2 en i con un residuo de $A+iB$. Además la curva α da una vuelta en sentido antihorario a este polo. Se sigue que $\int_\alpha zf(z)\ dz=-2\pi i(A+iB)$.

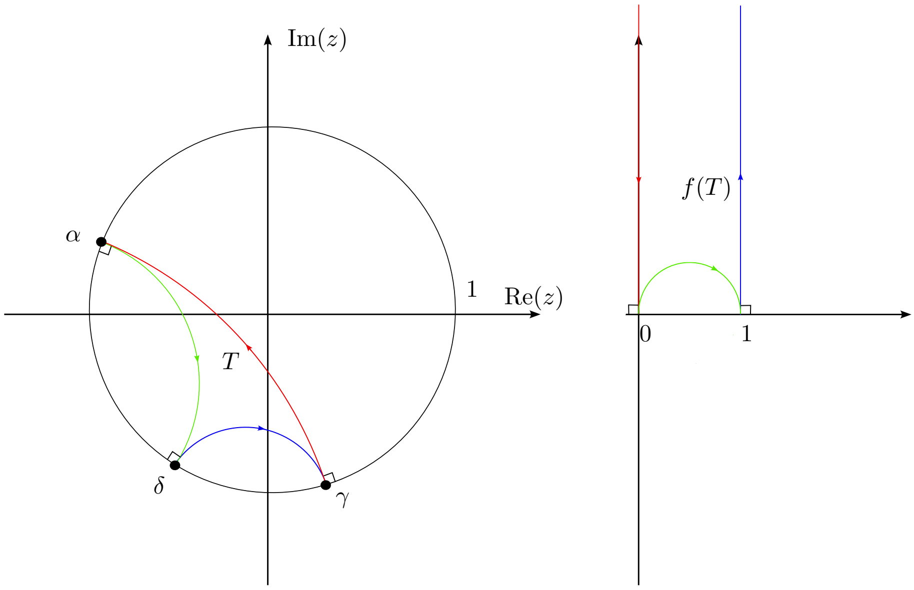
Ejercicio 5

1. No existe ya que para que esto ocurra los vértices deben ir a los vértices, pero las transformaciones de Mobius preservan ángulos, sin embargo, los ángulos del primer triángulo son cero mientras que los del segundo no.

2. La transformación de Mobius $f(z)=\frac{z-\alpha}{z-\gamma}\frac{\delta-\gamma}{\delta-\alpha}$ lleva $\alpha\mapsto 0$, $\gamma\mapsto\infty$ y $\delta\mapsto 1$. Con esto la circunferencia unidad va al eje real unión el infinito. Además, por como están ordenados los puntos α,γ,δ, al recorrer la circunferencia unidad en sentido antihorario se tiene que la imagen recorre el eje real *hacia* $+\infty$. Como las transformaciones de Mobius preservan orientación se sigue que el interior de la circunferencia va al semiplano superior.

3. El segmento de circunferencia que va desde α hasta γ (denotamos $[\alpha,\gamma]$) se mapea por la transformación de Mobius a un segmento de recta conectando 0 con ∞ a través del semiplano superior. Pero como el segmento de circunferencia $[\alpha,\gamma]$ es perpendicular a la circunferencia unidad se sigue el segmento de recta imagen debe ser pependicular al eje real. Como además pasa por 0 y por ∞ no hay otra que $f([\alpha,\gamma])$ sea la parte positiva del

eje imaginario (junto con ∞ y 0). De igual manera se concluye que la imagen del segmento de circunferencia $[\delta,\gamma]$ va hacia el segmento de recta $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 1, \mathrm{Im}(z) \geq 0\} \cup \{\infty\}$. También de igual forma se concluye que la imagen del segmento de $[\alpha,\delta]$ va a parar a al segmento de circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1/2| = 1/2, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$. Ver figura. Como las transformaciones de Mobius preservan orientación el interior del tríangulo va al interior del tríangulo imagen.



Ejercicio 6

1. Es un teorema que dada la serie de potencias existe un único $R \in [0,\infty]$ tal que

   a) Si $|z| < R$ la serie de potencias converge absolutamente.

   b) Si $|z| > R$ la serie de potencias no converge.

   Dicho R es el llamado radio de convergencia. Además se puede calcular mediante $R = (\limsup_k \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$.

2. Tenemos $\sum_{k=1} kz^k = z \sum_{k=1} kz^{k-1} = z(\sum_{k=0} z^k)'$. Pero la serie dentro de la derivada es la serie geométrica, cuyo radio de convergencia es 1 y su valor es $\frac{1}{1-z}$. Entonces

$$\sum_{k=1} kz^k = z \sum_{k=1} kz^{k-1} = z(\sum_{k=0} z^k)' = z(\frac{1}{1-z})' = \frac{z}{(1-z)^2}$$

   Además el radio de convergencia es 1.

3. La función claramente es holomorfa en un entorno de $z = 0$, además $\lim_{z\to 0} f(z) = 1$ por lo cual es continua. Al ser continua y holomorfa alrededor de $z = 0$ se sigue que es holomorfa en $z = 0$ también.

4. Es un resultado que el radio de convergencia de la serie de Taylor de f corresponde al *mayor* disco centrado en $z = 0$ que entra en el dominio de la función. En este caso f tiene un polo en $z = 2\pi$ y es la primer singularidad no evitable que aparece. Se sigue que el radio de convergencia es $R = 2\pi$.