N^o de examen	Cédula	Apellido y nombre

Calificación (uso docente)

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Ej. 5	Ej. 6	**Total**

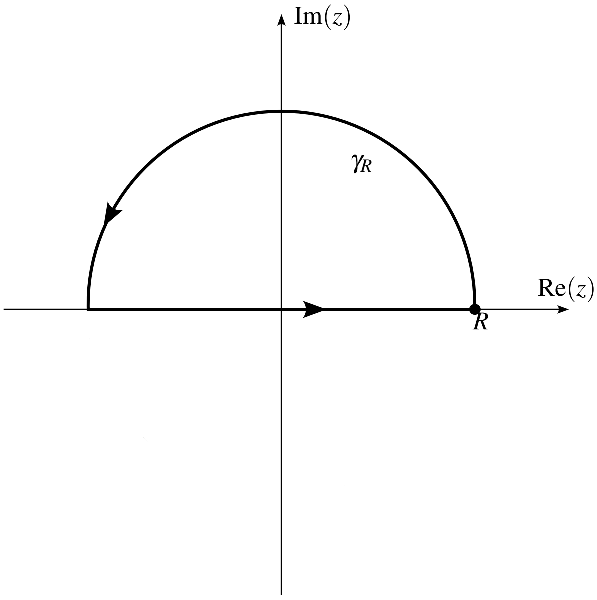
Importante

- El examen dura tres horas.
- De los siete ejercicios cada estudiante debe hacer sólo cuatro. Es importante entregar sólo cuatro ejercicios, sino el examen no se corregirá.
- No se permite el uso de material.
- Cada ejercicio tiene una puntuación de 25 puntos.

Ejercicio 1

Sea $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$,

1. Clasificar las singularidades de f: tipo de singularidad y en caso de ser polos el orden.
2. Calcular $\int_{\gamma_R} f(z)\, dz$ donde γ_R es la curva de la figura, con $R > 2$.



3. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx$.

Para el ejercicio puede ser de utilidad el siguiente lema: Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua y sea para todo $R > 0$ suficientemente grande tal que $S_R \subset \Omega$ el arco de circunferencia $z(t) = Re^{it}, \theta_1 \leq t \leq \theta_2$. Si $\lim_{z\to\infty} zf(z) = L$ entonces

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} f(z)\, dz = iL(\theta_2 - \theta_1)$$

Ejercicio 2

Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$, y denotamos $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ con $u, v : \Omega \to \mathbb{R}^2$.

1. Enuncie las ecuaciones de Cauchy-Riemann y explique la relación entre el hecho de que f sea holomorfa y u, v diferenciables.
2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $f(z) = \bar{z}$. ¿Es f holomorfa?
3. Sea $\mathrm{Log} : \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : z \in \mathbb{R}, z \geq 0\} \to \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Log}(z) = log(|z|) + i\mathrm{Arg}_{(0,2\pi)}(z)$, donde log(en minúsculas) es el logaritmo de usual de variable real. ¿Es Log holomorfa?
4. ¿Es $h(z) = \overline{\mathrm{Log}(\bar{z})}$ holomorfa?

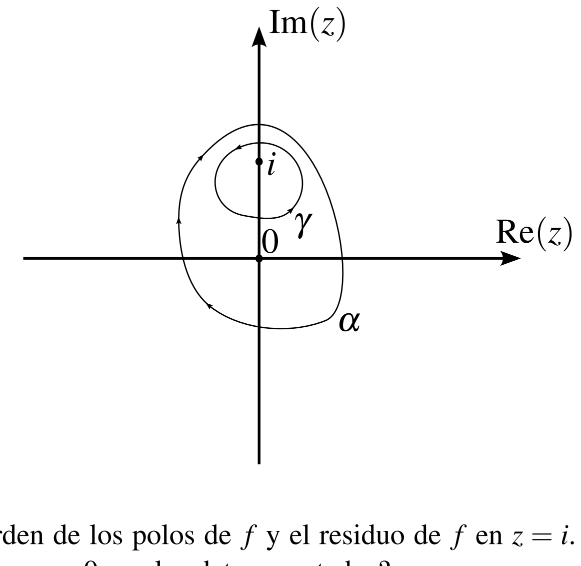
Ejercicio 3

Para los complejos $D := \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0, \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$ definimos $z^z := e^{zLog(z)}$ donde Log es un logaritmo definido en D y tal que $Log(1) = 0$.

1. Sea $z \neq 0$. Calcular la parte real e imaginaria de z^z. Justifique su respuesta.
2. Utilice lo anterior para encontrar x^x para $x > 0$ y para $x < 0$, es decir, para los reales positivos y los reales negativos.
3. Verifique que con ese resultado se tiene que $(-1)^{-1} = -1$, ¿Cuál es el valor de i^i?

Ejercicio 4

Sea $f : \mathbb{C} - \{0, i\} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Se sabe que $\lim_{z\to 0} zf(z)$ existe y es distinto de cero. Además $\lim_{z\to i}(z-i)^2 f(z) = A \neq 0$ y $\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i B$, siendo γ la curva de la figura.



1. Calcule el orden de los polos de f y el residuo de f en $z = i$. ¿Se puede calcular el residuo de f en $z = 0$ con los datos aportados?
2. Consideremos ahora la función $g : \mathbb{C} - \{0, i\} \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = zf(z)$. Calcule el residuo y orden del polo $z = i$.
3. Calcular $\int_\alpha zf(z)\, dz$ siendo α la curva de la figura.

Ejercicio 5

Sean α, γ, δ tres puntos de la circunferencia unidad ordenados como en la figura. Le llamamos T al triángulo formado por los segmentos de circunferencia. Notar que los segmentos llegan perpendicular a la circunferencia unidad y además los ángulos del triángulo son cero.

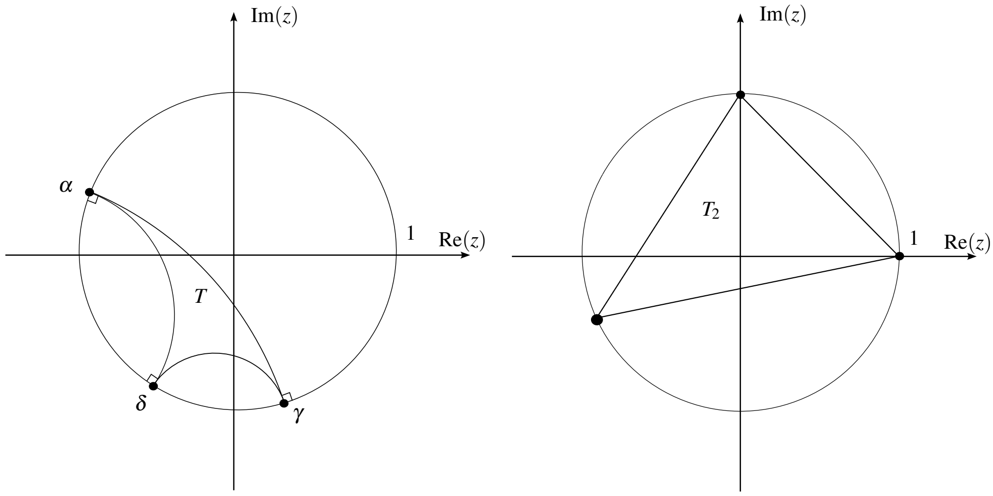


Figura 1: El triángulo T tiene de vértices a α, δ, γ, sus ángulos valen cero, y los ángulos formados con la circunferencia valen $\pi/2$.

1. ¿Existe una transformación de Mobius que lleve el triángulo T en el triángulo T_2? En caso de existir calcular.
2. Hallar una transformación de Mobius que lleve los puntos $\{\alpha, \gamma, \delta\}$ en los puntos $\{0, 1, \infty\}$ y que además lleve el interior de la circunferencia unidad en el semiplano superior. *Notar que la pregunta no exige que $\alpha \mapsto 0$, $\gamma \mapsto 1$ y $\delta \mapsto \infty$, podría ser en otro orden.*
3. **Esta parte opcional, es por puntos extra**. Calcular la imagen del triángulo T por la transformación de la parte anterior.

Ejercicio 6

1. Defina radio de convergencia de una serie de potencia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ y de una fórmula para su cálculo.
2. Hallar el radio de convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k z^k$. Además hallar una fórmula para el valor de la serie.
3. Sea $f(z) = \begin{cases} \frac{z}{\sin z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$, pruebe que f es holomorfa en $z = 0$.
4. Explicar cuál es el radio de convergencia de la serie de Taylor centrada en 0 de $f(z)$.