Solución del Examen
Funciones de Variable Compleja

Febrero de 2022

Ejercicio 1 (20 puntos)

Ver el Teorema $9(i)$ de las notas del curso.

Ejercicio 2 (15 puntos)

Sea $R > r_0$. Por la desigualdad triangular para integrales complejas y la hipótesis:

$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| &\leq \int_{\gamma_R} |f(z)|dz \\ &\leq \int_{\gamma_R} \frac{M}{|z|^a} = M\int_0^\pi \frac{1}{R^a} R d\theta = \frac{M\pi}{R^{a-1}} \end{aligned}$$

Usando que $a > 1$ y tomando límite con R tendiendo a infinito:

$$\lim_{R\to+\infty} \left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \lim_{R\to+\infty} \frac{M\pi}{R^{a-1}} = 0.$$

Como el límite del módulo de la integral es cero, entonces el límite de la integral debe ser cero, como queríamos demostrar.

Ejercicio 3 (35 puntos)

Consideremos la función de variable real f dada por $f(z) = 1/(1+z^2)^2$. Definiendo $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ se ve que f es holomorfa en el abierto Ω, y sus polos se encuentran en i y en $-i$. Para cada $R > 1$, vamos a estudiar la integral de f en la curva que es unión entre el segmento $[-R, R]$ y γ_R. Sea $C_R = [-R, R] \cup \gamma_R$. Por la aditividad de la integral tenemos que:

$$\int_{C_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz = I_R + J_R. \tag{1}$$

Estudiemos separadamente los límites $\lim_R I_R$ y $\lim_R J_R$. Observar que la primera es una integral de variable real. Se observa que existe el límite $\lim_R I_R$, pues estamos ante una integral impropia con integrando positivo y dominada por $1/(1+x^2)$, que es convergente. En efecto, $\lim_R I_R = I$ es lo que queremos encontrar.

Para calcular $\lim_R J_R$ primero notemos que $|f(z)|$ decae con orden cuártico en $|z|$, y en particular cumple la condición del Ejercicio anterior con $M = 1$ y $a = 4$. Como f es además holomorfa para $|z| > 1$, tenemos por el Ejercicio anterior que $\lim_R J_R = 0$.

Por último, para calcular la integral de f sobre la curva cerrada C_R podemos utilizar el Teorema de los Residuos. El único polo rodeado por C_R es $z = i$, siempre que $R > 1$. Como el polo es de orden 2, si definimos $g(z) = (z-i)^2 f(z) = 1/(z+i)^2$ entonces

$$\int_{C_R} f(z)dz = Res(f, i) = g'(i) = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{1}{4i}. \tag{2}$$

Reemplazando (2) en (1) y tomando límite con R tendiendo a infinito tenemos que

$$\int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i Res(f, i) = \frac{\pi}{2} = I.$$

El límite que se pide calcular es $I = \frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 4 (30 puntos)

a) Observemos que la función $g(z) = z^5$ transforma el conjunto A en el semiplano de parte imaginaria positiva. Basta ahora con tomarse $f = T \circ g$, siendo T una transformación de Möbius que lleva el semiplano de parte imaginaria positiva al disco abierto de radio 2. Esto es posible eligiendo T tal que

$$T(0) = -2,\ T(1) = -2i,\ T(\infty) = 2$$

Dicha transformación es

$$T(z) = 2\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$

Por lo tanto, si $g(z) = z^5$ la función meromorfa buscada es

$$f(z) = T \circ g(z) = 2\left(\frac{z^5 - i}{z^5 + i}\right)$$

b) Dicha función f no es única, pues basta con tomar $f_2(z) = if_1(z)$, pues el conjunto B es invariante por rotaciones.

c) Si f fuese entera, como es acotada por el Teorema de Liouville sería constante. Pero $f(A)$ es todo el conjunto B, por lo que no es constante.

Si f fuese una transformación de Möbius, su inversa también. Pero las transformaciones de Möbius llevan circunferencias en rectas o circunferencias, y f^{-1} lleva el borde de B, que es una circunferencia en el borde de A, que no es recta ni circunferencia.

d) Consideramos $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ transformación de Möbius. Queremos ver que T tiene un punto fijo en $\overline{\mathbb{C}}$. Observar primero que si T no es la identidad, no puede tener más de dos puntos fijos (si tiene tres puntos fijos debe ser la identidad, ya que queda determinada por la imagen de tres puntos). Tenemos $T(z) = z$ si y solo si

$$az + b = cz^2 + dz$$
$$cz^2 + z(d-a) - b = 0$$

Si $c \neq 0$ la ecuación tiene solución y por lo tanto hay puntos fijos (en particular ∞ no es punto fijo). Si $c = 0$ y $d \neq a$ también hay solución en $\mathbb{C}$ (obtenemos una ecuación lineal).

Si $c \neq 0$ y $d = a$ entonces, si $b = 0$ la transformación es la identidad, y si $b \neq 0$ no hay solución en $\mathbb{C}$, pero sí se verifica $T(\infty) = \infty$, por lo tanto también tiene punto fijo.

Del estudio por casos se desprende que ∞ es el único fijo si $c = 0$, $b \neq 0$ y $d = a$. Es decir, $T(z) = z + \frac{b}{d}$, una traslación.