Examen
Funciones de Variable Compleja

Febrero de 2022

Ejercicio 1 (20 puntos)

Definir la función índice. Probar que siempre toma valores enteros.

Ejercicio 2 (15 puntos)

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, $r_0 = |z_0|$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r_0\}$ abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. Para cada $R > r_0$ consideremos la curva abierta $\gamma_R : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = Re^{it}$.

Probar que si existen dos reales $M > 0$ y $a > 1$ tales que $|f(z)| \leq M/|z|^a$ para todo $z \in \Omega$, entonces

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$

Ejercicio 3 (35 puntos)

Calcular la integral $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$.

Ejercicio 4 (30 puntos)

Vamos a denotar el conjunto de complejos extendido mediante $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Consideremos los siguientes conjuntos

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \ arg(z) \in (0, \pi/5)\}, \quad B = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 2\}$$

a) Encontrar una función meromorfa f tal que $f(A) = B$.
b) Mostrar que dicha f no es única.
c) Probar que f no puede ser entera ni una transformación de Möbius.
Sugerencia: toda función entera no constante se extiende a un mapa $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$.
d) Probar que toda transformación de Möbius $T : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ tiene al menos un punto fijo. Además, probar que si el único fijo es ∞ entonces la transformación debe ser una traslación.

Importante: justificar detalladamente las respuestas.