Examen
Funciones de Variable Compleja

Miércoles 28 de julio de 2021

Ejercicio 1 (30 puntos)

a) Las funciones holomorfas deben cumplir con las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x(x,y) = 2x = v_y(x,y)$$
$$u_y(x,y) = -2y = -v_x(x,y).$$

Integrando ambas expresiones, resulta que $v(x,y) = 2xy + c$, y como $f(0) = u(0,0) + iv(0,0) = 0$ debemos tener que $c = 0$. Entonces:

$$f(z) = f(x+iy) = (x^2 - y^2) + i(2xy) = (x+iy)^2 = z^2,$$

y resulta que $f(z) = z^2$.

b) Las transformaciones de Möbius son conformes (preservan ángulos), mientras que $f(z) = z^2$ duplica los ángulos que se forman entre rectas no paralelas.

c) Por el Teorema de Cauchy, la integral en cualquier curva simple cerrada es cero. Equivalentemente, la integral no depende del camino. Observar que $F(z) = z^3/3$ es una primitiva de z^2, y los extremos de γ son $\gamma(0) = cos(0) = 1$ y $\gamma(1) = cos(i\pi) = -1$. Por el teorema de la Primitiva:

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(-1) - F(1) = (-1)^3/3 - 1/3 = -2/3.$$

Ejercicio 2 (30 puntos)

Consideremos la función $f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$.

a) Las singularidades se encuentran al anular el denominador: si $z = \rho e^{i\varphi}$ entonces $z^4 = \rho^4 e^{i4\varphi} = -1 = e^{i(\pi+2k\pi)}$. Igualando módulo y argumento resulta que $\rho = 1$ y $\varphi = \pi(1+2k)/4$. La función $f(z)$ tiene cuatro polos simples, ubicados en $z_k = e^{i\pi(1+2k)/4}$, con $k \in \{0,1,2,3\}$.

b) Por ser polos simples, aplicando la regla de L'Höpital tenemos que:

$$Res(f, z_k) = \lim_{z\to z_k} (z - z_k)\frac{z^2}{z^4+1} = \frac{z_k^2}{4z_k^3} = \frac{1}{4z_k}.$$

c) Probemos primero que la integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}dx$ coincide con la siguiente integral compleja: $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)dz$, siendo C_R la curva cerrada orientada positivamente, con un primer tramo el segmento real $[-R, R]$ y un segundo tramo $\gamma(t) = Re^{it}$, con $t \in [0, \pi]$. En efecto, como f es holomorfa en $|z| > R > 1$ y $zf(z)$ tiende a 0 en el infinito, por el Lema de deformación de caminos la integral sobre γ tiende a 0. Entonces:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{z^2}{z^4+1}dx = I,$$

La curva γ rodea a los polos simples z_0 y z_1, pues son los polos que tienen parte imaginaria positiva. Por el Teorema de los Residuos y el cálculo hecho en (b):

$$I = 2\pi i[Res(f, z_0) + Res(f, z_1)] = \pi\frac{e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}}{2} = \pi cos(\pi/4) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Ejercicio 3 (25 puntos)

a) Si $R' < R$, f es holomorfa en $D(z_0, R')$, y $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.
Utilizando la estimativa de Cauchy, resulta que:

$$
\begin{aligned}
|f(z)| = |\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}||(z-z_0)|^n \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{R'^n}|z-z_0|^n,
\end{aligned}
$$

siendo $M = \text{máx}_{z \in \overline{D}(z_0, R')} |f(z)|$. Es claro que la serie converge si $|z - z_0| < R'$, por lo que el radio de convergencia es mayor que o igual a R.

b) Si f es holomorfa en todo el plano se deduce de la parte a), tomando $R = \infty$, que el radio de convergencia es infinito. Luego, sabemos que si $R' < R$ siendo R el radio de convergencia (en este caso $R = \infty$, entonces las sumas parciales $S_N(z) = \sum_0^n \frac{f(n)(z_0)}{n!}(z - z_0)$ convergen uniformemente a f. Como todo compacto K se puede meter en un disco de radio R' se concluye el resultado.

c) Observemos que φ se puede expresar mediante una serie geométrica:

$$
\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-cz}{d} \right)^n,
$$

y su radio de convergencia es $R = \frac{|d|}{|c|}$, que coincide con la magnitud del polo $p = -\frac{d}{c}$.

Ejercicio 4 (15 puntos)

Ver la página 40 de los apuntes del teórico.