Examen
Funciones de Variable Compleja

Miércoles 28 de julio de 2021

Ejercicio 1 (30 puntos)

Sabemos que $f(z) = f(x+iy)$ es entera, $f(0) = 0$ y su parte real es $u(x,y) = x^2 - y^2$.

a) Expresar $f(z)$ explícitamente en la variable compleja z.

b) ¿Es f una transformación de Möbius? Justificar.

c) Hallar $\int_\gamma f(z)dz$, siendo $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = cos(i\pi t)$.

Ejercicio 2 (30 puntos)

Consideremos la función $f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$.

a) Identificar sus singularidades.

b) Hallar los residuos de las singularidades anteriores.

c) Calcular $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$.

Ejercicio 3 (25 puntos)

a) Consideremos $f : D(z_0, R) \to \mathbb{C}$ holomorfa. Si $\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$ es la representación por serie de potencias de f centrada en z_0, probar que el radio de convergencia es mayor o igual a R.
Sugerencia: expresar a_n en función de $f^{(n)}(z_0)$ y utilizar la estimativa de Cauchy para acotar la serie en cualquier disco $D(z_0, R')$, siendo $R' < R$.

b) Probar que si f es entera, entonces su representación por serie de potencias centrada en cualquier punto tiene radio de convergencia infinito. Probar también que existe una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de polinomios de variable compleja que converge uniformemente en compactos a f, esto es, $\forall K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, $p_n\big|_K$ converge uniformemente a $f\big|_K$.

c) Sea $\varphi(z) = (az+b)/(cz+d)$ una transformación de Möbius con $c \neq 0$ y $d \neq 0$. Probar que es analítica en $D(0, |p|)$, siendo p el polo de φ.
Sugerencia: expresar a $\varphi(z)$ mediante suma de dos series geométricas.

Ejercicio 4 (15 puntos)

Demostrar que una función f entera cuyas raíces tienen algún punto de acumulación, entonces f es idénticamente nula.