Ejercicio 1

1. Sea $z \in A$, entonces $z = iy$ y $e^z = sen(y) + icos(y)$. Por lo que la afirmación es **verdadera**.
2. Tenemos que $f(z) = sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Luego, utilizando la desigualdad triangular es cierto que $|sin(z)| \leq \frac{1}{2}(|e^{iz}| + |e^{iz}|) = \frac{1}{2}(e^{|Im(z)|} + e^{|Im(z)|}) \leq e$, por lo que la afirmación es **verdadera**.
3. Se puede verificar que el radio de convergencia es $1/2$. Alternativamente, evaluando en $z = 1$ tenemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ diverge, por lo que el radio de convergencia no puede ser mayor a 1, por lo que la afirmación es **falsa**.
4. Por definición la afirmación es **verdadera**

Ejercicio 2

1. Las raíces del polinomio $z^2 - 3z + 5$ son $z = \dfrac{3 \pm \sqrt{11}i}{2}$. Luego

$$\int_C \frac{1}{z^2 - 3z + 5} = \int_C \frac{1}{(z - \frac{3+\sqrt{11}i}{2})(z - \frac{3-\sqrt{11}i}{2})}$$

Como $f(z) = \dfrac{1}{z - \frac{3-\sqrt{11}i}{2}}$ es holomorfa en una región convexa que contiene a C la fórmula de Cauchy nos dice que

$$\int_C \frac{1}{z^2 - 3z + 5} = 2\pi i Ind_C((3 + \sqrt{11}i)/2) f\left(\frac{3 + \sqrt{11}}{2}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{11}}$$

2. Las raíces del polinomio $z^2 + z + 1$ son $z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$, como ambas raíces tienen índice 0 respecto a C concluimos que $\int_C \frac{1}{z^2+z+1} = 0$

Ejercicio 3

1. Consideremos la función $f(z) = z^2$. Entonces $|z^2| = |z|^2$ y $Arg(z^2) = 2Arg(z)$. Podemos escribir B de manera alternativa utilizando el argumento: $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < Arg(z) < \pi\}$ concluimos que esta función cumple lo requerido.
2. Supongamos que f es de Möbius. Entonces f es invertible y está definida en $\hat{\mathbb{C}}$. Luego f^{-1} es una función que manda la recta $\partial B \to \partial A$. Esto es absurdo porque f debe mandar la recta real en una recta o una circunferencia.
3. Sea T la transformación de Möbius que cumple que $T(B) = D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Entonces $T \circ g(\mathbb{C}) = D$. Como $T \circ g$ es holomorfa y acotada, entonces es constante. Sin embargo, como T es biyectiva esto implica que g es constante, lo que contradice el hecho de que $g(\mathbb{C}) = B$.
4. Sea $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $h(\mathbb{C}) \subseteq A$. Entonces $T \circ g \circ h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa que cumple que $T \circ f \circ h(\mathbb{C}) \subseteq D$. Esto implica que $T \circ f \circ h$ es acotada, y, por el teorema de Liouville, es constante. Como T y f son biyectivas esto implica que es constante.

Ejercicio 4 Ver teórico