Universidad de la República **Funciones de Variable Compleja**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso 2020**

EXÁMEN – Sábado 27 de febrero de 2021

Nro de Exámen	Cédula	Apellido y nombre

Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen.

Ejercicio 1. (40 pts) Indicar si cada una de las afirmaciones es verdadera o falsa, justificando brevemente su respuesta.

(1) Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) = 0\}$. La función $f(z) = e^z$ verifica $f(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
(2) La función $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sin(z)$ está acotada.
(3) El radio de convergencia de la serie $\sum 2^n z^n$ es 2.
(4) Si $\gamma \subset \Omega$ es una curva cerrada homóloga a cero en Ω, entonces $ind(\gamma, z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \backslash \Omega$.

Problema 2. (20 pts)

(1) Calcular la integral
$$\int_C \frac{1}{z^2 - 3z + 5}\, dz,$$
donde C es el rectángulo con vértices $0, 4i, 10, 10 + 4i$ orientado en sentido horario.

(2) Calcular la integral $\int_C \frac{1}{z^2+z+1}\, dz$ sobre el mismo C.

Problema 3. (30 pts) Se consideran los conjuntos:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < arg(z) < \pi/2\} \text{ y } B = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$$

(1) Encontrar una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f(A) = B$.
(2) ¿Es f una transformación de Mobius? Justifique su respuesta.
(3) ¿Existe una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f(\mathbb{C}) = B$?. En caso afirmativo, hállela. En caso negativo, demuéstrelo.
(4) Demostrar que si $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa y $g(\mathbb{C}) \subset A$, entonces g es constante.

Problema 4. (20 pts) Probar que los ceros de una función holomorfa y no nula en $\mathbb{C}$ son aislados.