Solución del Examen
Funciones de Variable Compleja

Diciembre de 2021

Ejercicio 1 (10 puntos)

Este ejercicio se resuelve mediante aplicación directa del Teorema de los Residuos:

a) Como la curva γ_n rodea exactamente n veces a los cuatro residuos en sentido positivo y la suma de estos residuos vale $i+1$, entonces $I_{\gamma_n} = n(2\pi i)(i+1) = -2n\pi + 2n\pi i$.

b) Como la curva γ_{-1} rodea exactamente una vez en sentido negativo a los puntos 1 e i, entonces:

$$\int_{\gamma_{-1}} f(z)dz = -2\pi i(Res(f,i) + Res(f,1)) = -2\pi i\frac{i+1}{2} = \pi - i\pi$$

Ejercicio 2 (20 puntos)

Este resultado se conoce como el *Lema de Deformación de Curvas*.
Su demostración se encuentra en las Notas del Curso (página 65, Lema 4, ítem 1).

Ejercicio 3 (40 puntos)

Para cada entero $n \geq 1$, queremos hallar $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}$. A tales efectos, para cada real $R > 1$ consideremos la siguiente integral de variable compleja:

$$J_{n,R} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^{2n}} = \int_{\gamma_R} f(z)dz,$$

donde γ_R es la curva cerrada que consiste del segmento $[-R, R]$ del eje real, unión la semicircunferencia $\gamma_C(t) = Re^{it}$ con $t \in [0, \pi]$. Por la aditividad de la integral:

$$J_{n,R} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^{2n}} + \int_{\gamma_C} f(z)dz.$$

Usando paridad de la función $f(x) = (1+x^{2n})^{-1}$ y tomando límite cuando R tiende a infinito, tenemos que:

$$\lim_{R\to\infty} J_{n,R} = 2I_n + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_C} f(z)dz,$$

siempre que ambas integrales existan. Primero, vamos a probar que la última integral sobre γ_C vale 0 en el límite con R tendiendo al infinito. En efecto, para cada entero n tal que $n \geq 1$, se comprueba que $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, y f es continua cuando el módulo de z es $|z| > 1$. Aplicando el Lema de Deformación de Curvas del Ejercicio 2 con $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \pi$, tenemos que la integral en la semicircunferencia vale 0 cuando tomamos el límite con R tendiendo a infinito.

En conclusión, para calcular I_n basta con calcular $J_{n,R}$ en el límite cuando R tendiendo a infinito. Para ello, haremos uso del Teorema de los Residuos. Observar que $f(z)$ tiene $2n$ polos simples, que verifican $z^{2n} = -1$. Para cada $k \in \{0, \ldots, 2n-1\}$, el k-ésimo polo simple es $z_k = e^{i\varphi_k}$, con $\varphi_k = \frac{\pi}{n}(k + 1/2)$.

Los polos rodeados por γ_R para $R > 1$ se obtienen eligiendo $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, y sus residuos son:

$$Res(f, z_k) = \lim_{z \to z_k} \frac{z - z_k}{1 + z^{2n}} = \frac{1}{2n z_k^{2n-1}},$$

donde se ha utilizado la Regla de L'Höpital en el último paso. Apliquemos finalmente el Teorema de los Residuos:

$$\lim_{R\to\infty} I_{n,R} = 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} Res(f, z_k) = \frac{\pi i}{n} e^{-i\pi/2n} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{-i\pi/n})^k$$

$$= \frac{\pi i}{n} e^{-i\frac{\pi}{2n}} \frac{e^{-i\pi - 1}}{e^{-i\frac{\pi}{n}} - 1} = \frac{\pi}{n \sin(\pi/2n)}.$$

En conclusión, tenemos que:

$$I_n = \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} I_{n,R} = \frac{\pi/2n}{\sin(\pi/2n)}$$

Se puede verificar el resultado conocido $I_1 = \pi/2$.

Ejercicio 4 (30 puntos)

a) Queremos probar que f es de Möbius. Sea Ψ una transformación de Möbius tal que $\Psi(\infty) = p$ y $\Psi(0) = z_0$, siendo z_0 el único 0 de f. Entonces, $f \circ \Psi$ es un automorfismo que manda 0 en 0 y ∞ en ∞. Si probamos que $f \circ \Psi$ es de Möbius, entonces $f \circ \Psi \circ \Psi^1 = f$ también lo es.

   Como f es una función entera, se tiene que $f(z) = \sum_1^\infty a_i z^i$ en todo el plano. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f(0) = 0$ y $f(\infty) = \infty$. Sea $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$h(z) = f(1/z) = \sum_1^\infty a_i \frac{1}{z^i}.$$

   Como $p = \infty$ es un polo de orden 1 para f, entonces 0 es un polo de orden 1 para h (simplemente estamos componiendo f con la transformación de Möbius $1/z$). Esto implica que $a_i = 0$ para $i > 1$ y $a_1 \neq 0$. Despejando obtenemos que $f(z) = a_1 z$. Es decir, f es una homotecia, y en particular de Möbius.

b) Observar que q se encuentra en la circunferencia de centro 0 y radio 1, al igual que los puntos -1 y 1. Como las transformaciones de Möbius quedan determinadas por la imagen de tres puntos y mandan la familia de rectas y circunferencias en sí misma, tenemos que f manda la circunferencia de centro 0 y radio 1 en el eje imaginario.

   Como las transformaciones de Möbius también preservan ángulos y $f(-1) = 0$, entonces f transforma la recta real en una recta perpendicular al eje imaginario que pase por 0, es decir, el eje real. En particular $f(0)$ debe de ser un número real.

c)

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1} = 1 - \frac{2}{1-z} = 1 - \sum_{k=0}^\infty 2z^i = -1 - 2\sum_1^\infty z^i$$

   Tenemos entonces que el radio de convergencia es el mismo que $\frac{1}{1-z}$, que es igual a 1.