Examen
Funciones de Variable Compleja

Diciembre de 2021

Ejercicio 1 (10 puntos)

Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{-1, 1.i, -i\}$. Sabemos que los respectivos residuos de f valen $Res(f,-1) = Res(f,1) = \frac{1}{2}$ mientras que $Res(f,-i) = Res(f,i) = \frac{i}{2}$. Calcular las integrales $I_\gamma = \int_\gamma f(z)dz$ para las siguientes curvas γ:

a) $\gamma_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma_n(t) = 2e^{int}$, siendo n un entero positivo.
b) $\gamma_{-1} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma_{-1}(t) = \frac{1+i}{2} + e^{-it}$.

Ejercicio 2 (20 puntos)

Sean θ_1 y θ_2 reales tales que $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$, y r_0 un real positivo. Consideremos el conjunto $\mathbb{C}_{\theta_1,\theta_2,r_0}$ tal que $\mathbb{C}_{\theta_1,\theta_2,r_0} = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi}\ , r > r_0,\ \theta_1 < \varphi < \theta_2\}$. Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{C}$ que contiene a $\mathbb{C}_{\theta_1,\theta_2,r_0}$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua, tal que $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$.

Probar que $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$, donde $\gamma_R : [\theta_1, \theta_2] \to \mathbb{C}$ es tal que $\gamma_R(t) = Re^{it}$.

Ejercicio 3 (40 puntos)

Para cada entero $n \geq 1$, calcular $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}$.

Ejercicio 4 (30 puntos)

Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ holomorfa, biyectiva y con inversa holomorfa en el plano complejo extendido $\hat{\mathbb{C}}$, con un polo simple en $p \in \hat{\mathbb{C}}$.

a) Probar que f es una transformación de Möbius.
Sugerencia: Primero ver que se puede suponer que $f(0) = 0$ y que $p = \infty$ y con esta suposición ver que f es una homotecia. Para esto considerar $h(z) = f(1/z)$. Se puede asumir que el desarrollo de potencias de una función entera tiene radio de convergencia infinito.
b) Supongamos ahora $p = 1$ (es decir $f(1) = \infty$) y que $f(-1) = 0$. Si $q \in \mathbb{C}$ es tal que $|q| = 1,\ q \neq 1,\ q \neq -1$ y $f(q) = i$, probar que necesariamente $f(0) \in \mathbb{R}$.
c) Ahora también suponemos que $f(0) = -1$, es decir, sabemos $f(0) = -1$, $f(1) = \infty$, $f(-1) = 0$. Escribir f como una serie de potencias centrada en $z = 0$ y hallar su radio de convergencia.
Sugerencia: Recordar desarrollo por serie de potencias de $\frac{1}{1-r}$

Importante: justificar detalladamente las respuestas.