Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL.
Funciones de variable compleja.
Curso 2018 - Curso 2019.

EXAMEN - DE FEBRERO DE 2020.

Ejercicio 1.(25 puntos)Sea $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$.

1. Clasificar las singularidades de:

   a) $e^{\frac{1}{z}} z^m$.

   b) $\frac{e^z - 1}{z^m \operatorname{sen} z}$.

2. Calcular
$$\int_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z^2 \operatorname{sen} z} dz.$$

Parte 1. a) Para clasificar la singularidad vamos a calcular $\lim_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}} z^m$. Sea $z = x + iy$ y consideramos $y = 0$. Entonces

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} x^m = +\infty \text{ y } \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} x^m = 0.$$

Lo que demuestra que no existe $\lim_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}} z^m$. Por lo tanto $e^{\frac{1}{z}} z^m$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$.

Parte 1.b) Las singularidades están en $z = 0$ y $z = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$ y $k \neq 0$). Para $z = 0$:

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z^m \operatorname{sen} z} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{z^m z} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{z^m} = \infty.$$

Por lo tanto $z = 0$ es un polo. Como

$$\lim_{z \to 0} z^m \frac{e^z - 1}{z^m \operatorname{sen} z} = 1$$

Entonces $z = 0$ es un polo de orden m.

Para $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ y $k \neq 0$:

$$\lim_{z \to k\pi} \frac{e^z - 1}{z^m \operatorname{sen} z} = \frac{e^{k\pi} - 1}{(k\pi)^m} \lim_{z \to k\pi} \frac{1}{sen(z)} = \infty.$$

Por lo tanto $z = k\pi$ es un polo. Como

$$\lim_{z \to k\pi} (z - k\pi) \frac{e^z - 1}{z^m \operatorname{sen} z} = \frac{e^{k\pi} - 1}{(k\pi)^m} \lim_{z \to k\pi} \frac{(z - k\pi)}{sen(z)} \overset{L'Hopital}{=} \frac{e^{k\pi} - 1}{(k\pi)^m} \lim_{z \to k\pi} \frac{1}{cos(z)} =$$

$$\frac{e^{k\pi} - 1}{(k\pi)^m} \frac{1}{(-1)^k} (\text{ el cual es distinto de cero e infinito. })$$

Entonces $z = k\pi$ es un polo de orden 1.

Parte 2. Utilizando el teorema de los residuos se tiene que

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z^2 \operatorname{sen} z} dz = 2\pi i C_1(0)$$

Como $z=0$ es un polo de orden dos, se tiene que

$$C_1(0) = \lim_{z\to 0}\left(z^2\frac{e^z-1}{z^2\operatorname{sen} z}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{e^z sen(z) - cos(z)(e^z-1)}{(sen(z))^2}$$

el límite anterior es de la forma $0/0$, entonces podemos utilizar L'Hôpital:

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z sen(z) - cos(z)(e^z-1)}{(sen(z))^2} = \lim_{z\to 0}\frac{2e^z sen(z) - sen(z)}{2sen(z)cos(z)} = \lim_{z\to 0}\frac{2e^z-1}{2cos(z)} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 2.(25 puntos)

1. Sean $\beta\in\mathbb{R}$ y $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Probar que $T(z)=e^{i\beta}\left(\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}\right)$ lleva el eje real en la cfa unidad.
2. Considere las rectas $r_1=\{z\in\mathbb{C}:\ Im(z)=0\}$ y $r_2=\{z\in\mathbb{C}:\ Im(z)=1\}$.
   a) Hallar una transformación de Moebius que lleve r_1 en la circunferencia unidad y r_2 en r_2.
   b) Dadas dos rectas cualesquiera paralelas r_3 y r_4 con $r_3\neq r_4$. ¿Existe una transformación de Moebius que lleve r_3 en la circunferencia unidad y r_4 en la recta r_2? Justificar.
   c) Dadas dos rectas cualesquiera (Pueden ser paralelas o no) r_5 y r_6 con $r_5\neq r_6$. ¿Existe una transformación de Moebius que lleve r_5 en la circunferencia unidad y r_6 en la recta r_2? Justificar.

Parte 1.
Sea $z\in\mathbb{R}$ entonces $\overline{z}=z$. Por lo tanto

$$|T(z)| = \left|e^{i\beta}\left(\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}\right)\right| = \left|e^{i\beta}\right|\left|\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}\right| \overset{|e^{i\beta}|=1}{=} \left|\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}\right| \overset{\overline{z}=z}{=} \left|\frac{z-\alpha}{\overline{z}-\overline{\alpha}}\right| =$$

$$\left|\frac{z-\alpha}{\overline{\overline{z-\alpha}}}\right| = 1.$$

Parte 2. a) Vamos a usar la parte 1 y vamos a considerar $T(z)=e^{i\beta}\left(\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}\right)$, con esto automáticamente se tiene que $T(r_1)$ es la circunferencia unidad. Ahora como r_1 y r_2 se cortan en ∞ y la cfa unidad y r_2 se cortan en i, entonces se tiene que cumplir que $T(\infty)=i$. Por lo tanto, como $T(\infty)=e^{i\beta}$, tomamos $e^{i\beta}=i$. Ahora basta con fijar un punto de r_2. Tomemos, por ejemplo, $T(1+i)=1+i$. Esto es cierto debido a que con las condiciones ya impuestas, la imagen de r_1 es una circunferencia o una recta que es tangente a la circunferencia unidad en i. Entonces hay que resolver la ecuación

$$T(1+i) = \frac{1+i-\alpha}{1+i-\overline{\alpha}} = 1+i.$$

La cual tiene como solución $\alpha=-1-i$. Alternativamente uno podía considerar que algún punto de r_2, $z=i+x$, tiene de imagen a ∞. Por ejemplo con $x=0$ se obtiene:

$$T(z) = i\frac{z+i}{z-i}$$

Parte 2.b) Basta considerar una transformación de Moebius T_1 con $T_1(r_3)=r_1$ y $T_1(r_4)=r_2$ y luego considerar $T\circ T_1$. Para justificar que T_1 existe y es de Mobius basta recordar que las traslaciones, las homotecias y las rotaciones son transformaciones de Mobius, además es claro que mediante estas transformaciones se puede llevar dos rectas paralelas cualesquiera en r_1 y r_2.

Parte 2.c) En general no existen, si justo r_5 y r_6 no son paralelas entonces se cortaran con un cierto ángulo distinto de 0 en un punto z. Por absurdo, si existiera dicha T, entonces $T(z) = i$, pero el ángulo que forman la recta r_2 y la circunferencia unidad en i es 0, mientras que antes no lo era. Esto es absurdo pues las transformaciones de Mobius preservan ángulos.

Alternativamente se podía usar que $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ de Mobius es biyectiva, pero dos rectas no paralelas se cortan en dos puntos (z y ∞) mientras que la circunferencia unidad y la recta r_2 solo se cortan en uno solo, absurdo.

Ejercicio 3. Probar el siguiente resultado:

Teorema de Cauchy en un convexo. Sea Ω un abierto convexo, $p \in \Omega$, f continua en Ω y $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$. Entonces $F' = f$ para alguna $F \in H(\Omega)$ (f tiene primitiva).
Ver notas.

Ejercicio 4.(Solo para el curso 2018)(25 puntos)

1. Mostrar que si $C > e$, $C \in \mathbb{R}$, la ecuación $Cz^n = e^z$ tiene n soluciones en $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$

2. Sea $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ un camino dado por $\gamma(t) = e^{e^{it}} - 10e^{6it}$. Calcular $Ind_\gamma(0)$

Parte 1. Vamos a utilizar el Teorema de Rouché. Consideramos $f(z) = Cz^n$ y $g(z) = Cz^n - e^z$. Por un lado

$$|f(z) - g(z)| = |e^z| \quad \overset{z = x + iy}{=} \quad e^x \quad \overset{|z| = 1}{\leq} \quad e.$$

Por otro lado $|f(z)| = |Cz^n| = C > e$. Por lo tanto

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \text{ para } |z| = 1.$$

Luego por el Teorema de Rouché, el número de ceros de f y g son iguales (para $|z| < 1$). Como el número de ceros de f es n, entonces el número de ceros de g es n.

Parte 2. Consideramos $f(z) = e^z - 10z^6$ y $\gamma_1(t) = e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Por el principio del argumento, como f es holomorfa, el número de ceros de f en el interior de γ_1 es igual a $Ind_{f\circ\gamma_1}(0)$. Además se tiene que $\gamma = f \circ \gamma_1$. Entonces por la parte anterior $Ind_\gamma(0) = 6$.