Universidad de la República **Funciones de Variable Compleja**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso 2020**

EXÁMEN – Lunes 14 de diciembre de 2020

Nro de Exámen	Cédula	Apellido y nombre

Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen.

Ejercicio 1. (30 pts) Indicar si cada una de las afirmaciones es verdadera o falsa, justificando brevemente su respuesta.

(1) La función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x+iy) = x^2 + y^2 + 2xyi$ es holomorfa.

(2) Si $f(z) = \sum_k a_k z^k, a_k \in \mathbb{R}, z \in \overline{B(0,1)}$, y $\sum |a_k|$ es convergente, entonces $g_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{ikz}$ converge uniformemente a f en $\overline{B(0,1)}$.

(3) $\{z \in \mathbb{C} : |e^z| = 1\}$ es un conjunto acotado.

(4) La transformación $T(z) = \frac{z+i}{iz+1}$ es la única que lleva la circunferencia de radio 1 en la recta real.

(5) Si $f(z) = 1/z$ y $\gamma(t) = 2 + e^{it}, t \in [0, 2\pi]$, entonces $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Solución:

(1) Definimos $u(x,y) = x^2 + y^2$ y $v(x,y) = 2xy$. Para ver si f es holomorfa estudiamos las derivadas parciales de u y v:

$$u_x = 2x \qquad u_y = 2y \qquad v_x = 2y \qquad v_y = 2x$$

Como $u_y \neq -v_x$ concluimos que la afirmación es **falsa**.

(2) Sabemos que en el dominio de la función se cumple que $|a_k z^k| \leq |a_k|$. Luego, como $\sum |a_k|$ es convergente, el criterio de mayorante de Weierstrass nos dice que g_n converge uniformemente. Por eso la afirmación es **verdadera**.

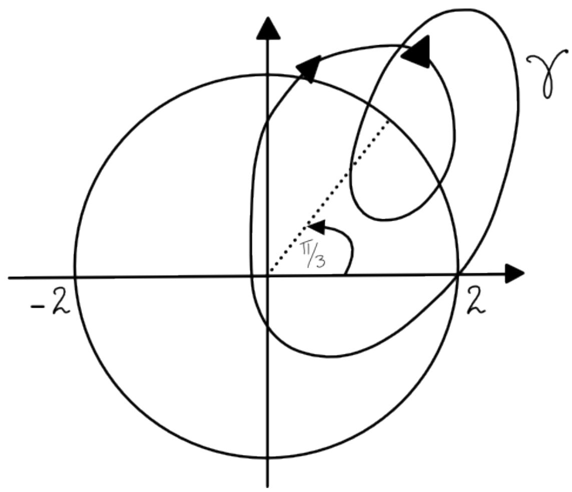
(3) Si $z = x + iy$ entonces $|e^z| = e^x$. Luego $|e^z|$ si y sólo si $z = iy$ y por lo tanto la afirmación es **falsa**.

(4) Podemos encontrar una transformación de Möbius T_2 tal que $T_2(1) = 10$, $T_2(i) = 1$ y $T_2(-i) = 20$. Como T_2 lleva circunferencias y rectas en circunferencias y rectas concluimos que la imagen de la circunferencia de radio 1 por T_2 es toda la recta real. Luego, la afirmación es **falsa**

(5) Como f es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y la curva γ es homóloga a 0 en este dominio, la afirmación es **verdadera**.

Problema 2. (20 pts)

(1) Sea γ la curva que aparece en la figura. Calcular $\int_\gamma \frac{ie^{iz}}{z-2e^{i\pi/3}}\ dz$.



(2) Sea α la curva que aparece en la figura . Calcular $\int_\alpha \frac{1}{z^2(z^2+1)}\ dz$.

Solución.

(1) Observamos que γ tiene índice -2 respecto al punto. Por la fórmula de Cauchy esto implica que

$$\int_\gamma \frac{ie^{iz}}{z-2e^{i\pi/3}} = -4\pi i f(2e^{i\pi/3})$$

(2) Por el teorema de residuos

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i(Ind_\gamma(0)Res(f,0) + Ind_\gamma(i)Res(f,i))$$

Sabemos que f tiene un polo de orden 2 en $z=0$, por lo que $Res(f,0) = lim_{z\to 0}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{z^2+1} = \lim_{z\to 0}\frac{-2z}{(z^2+1)^2} = 0$.

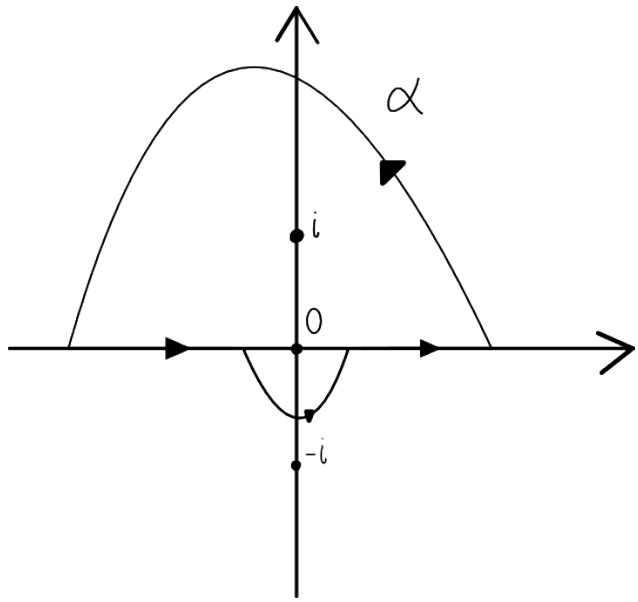
Como f tiene un polo de orden 1 en $z=i$ entonces $Res(f,i) = lim_{z\to i}(z-i)f(z) = lim_{z\to i}\frac{1}{z^2(z+i)} = \frac{1}{2i^3} = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}$ Luego tenemos que

$$\int f(z)dz = -\pi$$

Problema 3. (30 pts) Se consideran los conjuntos:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 0 \le arg(z) \le \pi/3\} \text{ y } B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$$

(1) Encontrar una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f(A) = B$.



(2) ¿Es f una transformación de Mobius? Justifique su respuesta.

(3) ¿Existe una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f(\mathbb{C}) = B$?. En caso afirmativo, hállela. En caso negativo, demuéstrelo.

(4) Demostrar que si $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa y $g(\mathbb{C}) = A$, entonces g es constante.

Solución:

(1) Consideramos la función $f_1(z) = z^3$. Observar que $f_1(A) = H = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) \geq 0\}$. Luego consideramos una transformación de Möbius f_2 que lleve H en B, y el interior en el interior. Por ejemplo, la única transformación T tal que $T(0) = 1$, $T(1) = i$ y $T(\infty) = -1$

(2) Si f fuera una transformación de Möbius entonces se cumpliría que $f \circ T^{-1}$ también lo es. Esto a su vez implica que z^3 es una transformación de Möbius, lo que es absurdo.

(3) Por el teorema de Liouville, si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cumple que $f(\mathbb{C}) \subseteq B$ entonces $|f(z)| \leq 1$ y por lo tanto f es constante. Por lo tanto, no se puede cumplir que $f(\mathbb{C}) = B$.

(4) Supongamos que $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función tal que $g(\mathbb{C}) = A$. Componiendo con la f hallada en la parte (1) tenemos que $f \circ g(\mathbb{C}) = f(A) = B$. Esto implica que $f \circ g$ es constante (por la parte (3)), pero como f es inyectiva esto implica a su vez que g es constante, lo que es absurdo pues $g(\mathbb{C}) = A$.

Problema 4. (20 pts) Se considera el siguiente teorema:

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$. Entonces f es holomorfa en z_0 si y sólo si f es diferenciable en z_0 y u, v verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Demostrar el directo o el recíproco, a elección.

Solución: Ver teórico