Universidad de la República **Funciones de Variable Compleja**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso 2020**

SOLUCIÓN – Sábado 8 de agosto de 2020

Ejercicio 1. (30 pts) Indicar si cada una de las afirmaciones es verdadera o falsa, justificando brevemente su respuesta.

(1) La función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sin(z)$ está acotada.
(2) Si $f(z) = \sum a_n z^n$ con radio de convergencia $r > 0$, entonces para cualquier entero positivo d la serie $\sum n^d a_n z^n$ tiene radio de convergencia r.
(3) Si $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, la ecuación $e^z = z_0$ tiene una única solución.
(4) Existe una única transformación de Mobius que lleva el eje real sobre sí mismo.
(5) Si f es holomorfa en Ω, $\gamma \subset \Omega$ es una curva cerrada homóloga a cero en Ω y $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 3$, entonces existen tres puntos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \Omega$ tales que $f(z_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Solución:

(1) $sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$. Si nos restringimos al eje imaginario tenemos que

$$sin(iy) = \frac{1}{2i}(e^{-y} - e^{y})$$

Un rápido análisis muestra que el módulo de esta expresión no está acotado, por lo que la afirmación es **falsa**.

Otra forma de verlo es con una aplicación directa del teorema de Liouville. f no es constante y por lo tanto no puede estar acotada.

(2) Usando que $\limsup_{n\to\infty}(n^d)^{1/n} = 1$ concluimos que el radio de convergencia de $\sum n^d a_n z^n$ es $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{|n^d a_n|^{1/n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|^{1/n}} = r$ por lo que la afirmación es **verdadera**.

(3) Si z cumple que $e^z = z_0$ entonces $e^{z+2k\pi i} = z_0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, por lo tanto la ecuación tiene infinitas soluciones y la afirmación es **falsa**.

(4) La identidad es una que lo cumple pero la transformación $T(z) = z + 1$ también lo cumple, por lo que la afirmación es **falsa**.

(5) Un contraejemplo es la función $f(z) = z^3$, integrada sobre la curva $\gamma = \{e^i t : t \in [0, 2\pi]\}$. Tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{3}{z} = 3$$

El problema es que tiene una única raíz pero de multiplicidad triple, por lo que la afirmación es **falsa** y no contradice el principio del argumento.

Problema 2. (20 pts)

Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2}\, dx$

Solución: Como la integral impropia converge, sabemos que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2}\, dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+4)^2}\, dx = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+4)^2}\, dz$ donde γ_R es el segmento de recta $[-R, R]$. Sea $C_R = \{Re^{it} : t \in [0, \pi]\}$, entonces tenemos la siguiente igualdad:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R\cup C_R}\frac{1}{(z^2+4)^2}\ dz=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{(z^2+4)^2}\ dz+\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{1}{(z^2+4)^2}\ dz$$

Vamos a probar que $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{(z^2+4)^2}\ dz=0$. Para eso, consideramos la siguiente cadena de desigualdades:

$$|\int_{C_R}\frac{1}{(z^2+4)^2}\ dz|\leq\int_{C_R}\left|\frac{1}{(z^2+4)^2}\right|dz=\int_{C_R}\frac{1}{|z^2+4|^2}\ dz\leq\int_{C_R}\frac{1}{||z^2|+4|^2}\ dz$$
$$=\int_{C_R}\frac{1}{(R^2+4)^2}\ dz=\frac{2\pi R}{(R^2+4)^2}$$

Como $\frac{2\pi R}{(R^2+4)^2}$ tiende a 0 cuando R se va a infinito concluimos que $\int_{C_R}\frac{1}{(z^2+4)^2}\ dz=0$. Luego, sabemos que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R\cup C_R}\frac{1}{(z^2+4)^2}\ dz=\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{1}{(z^2+4)^2}\ dz$$

Al ser una curva cerrada, podemos utilizar el teorema de los residuos para calcular $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\gamma_R\cup C_R}\frac{1}{(z^2+4)^2}\ dz$. Sabemos que los polos de $f(z)=\frac{1}{(z^2+4)^2}$ son las raíces de $(z^2+4)^2$, es decir $z=\pm 2i$. Como $Ind_{\gamma_R\cup C_R}(2i)=1$ e $Ind_{\gamma_R\cup C_R}(-2i)=0$ concluimos que $\int_{\gamma_R\cup C_R}\frac{1}{(z^2+4)^2}\ dz=2\pi i Res(f,2i)$.
Para calcular $Res(f,2i)$, usando que f tiene un polo de orden dos, en $2i$, calculamos

$$Res(f,2i)=\lim_{z\to 2i}\frac{\partial}{\partial z}\frac{(z-2i)^2}{1!}f(z)=\lim_{z\to 2i}\frac{\partial}{\partial z}\frac{(z-2i)^2}{(z^2+4)^2}=\lim_{z\to 2i}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{(z+2i)^2}$$
$$=\lim_{z\to 2i}\frac{-2}{(z+2i)^3}=\frac{-2}{(4i)^3}=-\frac{i}{32}$$

Juntando todo lo explicado concluimos que $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+4)^2}\ dx=2\pi i(\frac{-i}{32})=\frac{\pi}{16}$

Problema 3. (30 pts)

(1) Encontrar una transformación de Mobius que lleve el segmento de recta (abierto) determinado por los puntos $1+i$ y $2+2i$ en la semirrecta $(0,+\infty)\subset\mathbb{R}$.
(2) Se considera el semiplano superior $\mathbb{H}^2=\{z\in\mathbb{C}:Im(z)>0\}$ y $g:\mathbb{H}^2\to\{re^{i\theta}:r,\theta\in\mathbb{R},r>0,\theta\in(0,2\pi)\}$, $g(z)=z^2$. Demostrar que g es biyectiva, y por lo tanto invertible.
(3) Asumiendo que la inversa de g es holomorfa, encontrar una función holomorfa que lleve $\mathbb{C}\backslash s$ en el semiplano superior $\{z\in\mathbb{C}:Im(z)>0\}$, donde s el segmento de recta (cerrado) determinado por los puntos $1+i$ y $2+2i$.
(4) Demostrar que si $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es holomorfa y $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}\backslash s$, entonces f es constante.

Solución.

(1) Una transformación que cumpla esto debe cumplir que $T(1+i)=0$, $T(2+2i)=\infty$ y, observando que el orden se preserve correctamente, podemos pedir $T(0)=-1$. Como T lleva rectas y circunferencias en rectas y circunferencias y preserva orientación tenemos que estas condiciones son suficientes.

Si $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ por las condiciones expuestas sabemos que:

- $a(1+i)+b=0$
- $c(2+2i)+d=0$

- $\frac{b}{d} = -1$

  Despejando en T llegamos a que $T(z) = \frac{az - a(1+i)}{-\frac{az}{2} + a(1+i)} = \frac{z-1-i}{-z/2+1+i}$.

(2) El semiplano superior $\mathbb{H}^2$ lo podemos expresar como $\{re^{i\theta} : r > 0, \theta \in (0,\pi)\}$. Luego, si $r_0 e^{i\theta_0} \in \{re^{i\theta} : r, \theta \in I\!R, r > 0, \theta \in (0, 2\pi)\}$ sabemos que tiene dos raíces cuadradas: $\sqrt{r_0}e^{i\theta_0/2}$ y $\sqrt{r_0}e^{i(\theta/2+\pi)}$. Es claro que una (y solo una) de ellas está en $\mathbb{H}^2$. Luego, g es biyectiva y por lo tanto invertible.

(3) La composición de las funciones de ambas partes, es decir $h(z) = g^{-1} \circ T(z)$ cumple lo requerido.

(4) La función h de la parte anterior es una función biyectiva (por ser composición de dos funciones biyectivas). Por lo tanto, si probamos que $h \circ f$ es constante, entonces $f = h^{-1} \circ h \circ f$ es constante.

  Sea S una transformación de Möbius tal que $S(\mathbb{H}) = B(0,1)$. Entonces tenemos que $S \circ h \circ f(\mathbb{C}) = S \circ h(C \setminus s) = S(\mathbb{H}^2 = B(0,1)$, luego, $S \circ h \circ f$ es entera y acotada y, por el teorema de Liouville, es constante.

  Como S es una transformación de Möbius tenemos que es invertible y, si $S \circ h \circ f$ es constante, $S^{-1} \circ S \circ h \circ f = h \circ f$ también lo es, lo que termina de probar la afirmación.

  Para encontrar tal S, basta considerar una transformación de Möbius tal que $S(0) = 1, S(1) = i$ y $S(\infty) = -1$

Problema 4. (20 pts)

Demostrar el Teorema de Cauchy en el rectángulo.

(Si usa el Teorema de Cauchy en el triángulo, demuéstrelo).

Solución: Ver teórico