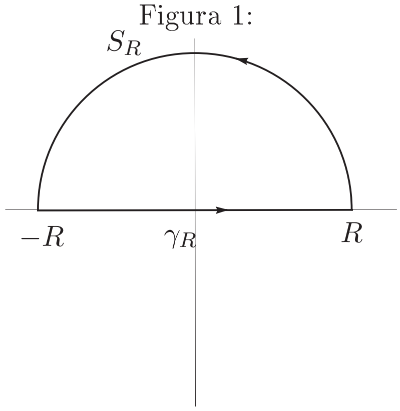
Ejercicio 1

1. Las singularidades se dan en los complejos de la forma $z = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

   - Para $z = 0$ se cumple que
   $$\lim_{z\to 0} \frac{z^2}{zsen(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{sen(z)} = 1.$$
   Lo que implica que es un polo de orden dos.
   Para hallar el residuo tenemos que hallar el siguiente límite:
   $$\lim_{z\to 0} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z^2}{zsen(z)}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{sen(z)}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{sen(z) - cos(z)z}{sen(z)^2}.$$
   Aplicando L'Hopital se tiene que
   $$\lim_{z\to 0} \frac{sen(z) - cos(z)z}{sen(z)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{sen(z)z}{2sen(z)cos(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{2cos(z)} = 0.$$
   - Para $z = k\pi$ con $k \neq 0$, se cumple
   $$\lim_{z\to k\pi} \frac{z-k\pi}{zsen(z)} = \frac{1}{k\pi} \lim_{z\to k\pi} \frac{z-k\pi}{sen(z)} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \frac{1}{k\pi} \lim_{z\to k\pi} \frac{1}{cos(z)} = \frac{1}{k\pi}\frac{1}{(-1)^k} \neq 0.$$
   Entonces, es un polo de orden uno y el residuo es $\frac{1}{k\pi}\frac{1}{(-1)^k}$.
   - Por el Teorema de los residuos, se tiene que
   $$\int_{|z|=4} \frac{dz}{zsen(z)} = 2\pi i(C_1(0) + C_1(\pi) + C_1(-\pi)) = 0 + \frac{1}{\pi}\frac{1}{(-1)} + \frac{1}{-\pi}\frac{1}{(-1)^{-1}} = 0.$$

Ejercicio 2 Para calcular $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}$ consideramos $f : \mathbb{C}\setminus\{ai, -ai\} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)^2}$. Consideramos la curva $\gamma_R : [-R, R] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma_R(t) = t$, y sea S_R una parametrización de la semicircunferencia de radio R como se muestra en la figura 1

Figura 1:



Sea $\alpha_R = \gamma_R + S_R$ la curva concatenación de las anteriores. Como la función es meromorfa con polos en $z = ai$ y $z = -ai$, por el Teorema de los residuos se tiene

$$\int_{\alpha_R} f(z)dz = 2\pi i \; ind_{\alpha_R}(ai) Res(f, ai) \quad \forall R > a.$$

Estudiemos el polo en $z = ai$. Como $f(z) = \frac{1}{(z+ai)^2(z-ai)^2}$ es muy claro que en $z = ai$ se tiene un polo de orden 2. En efecto,

$$\lim_{z\to ai} (z - ai)^2 f(z) = \frac{1}{(2ai)^2} \neq 0.$$

Ahora como el polo es de orden 2, entonces

$$Res(f, ai) = \lim_{z\to ai} \left((z - ai)^2 f(z)\right)' = \lim_{z\to ai} \frac{-2}{(z + ai)^3} = \frac{-2}{(2ai)^3} = \frac{-i}{4a^3}.$$

Entonces

$$\int_{\alpha_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} + \int_{S_R} \frac{dz}{(z^2 + a^2)^2} = 2\pi i \frac{-i}{4a^3} = \frac{\pi}{2a^3} \; \forall \; R > a$$

Como $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ entonces por el lema de deformación de caminos se tiene $\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)dz = 0$. Por lo tanto tomando límite en la expresión anterior se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi}{2a^3}.$$

Como el integrando es una función par se tiene

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3}.$$

Ejercicio 3 Ver las notas del curso.