Ejercicio 1

1. Para probar que f tiene todos sus ceros en $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < \frac{7}{2}\}$ primero vemos que tiene todos sus ceros en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{7}{2}\}$. Considerando $f(z) = z^6$ y γ una circunferencia de radio $\frac{7}{2}$ se tiene que

$$|P(z)-f(z)| = |-3z^5+2z^2+6| \leq 3|z|^5+2|z|^2+6 = 3\left(\frac{7}{2}\right)^5 + 2\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 6 < \left(\frac{7}{2}\right)^6 = |f(z)| \ \ \forall\, z \in \gamma*$$

donde la última desigualdad se sigue de que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{7}{2}\right)^5 > 2\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 6$$

lo cual es evidente. Entonces por el teorema de Rouché la cantidad de ceros de f en el interior de γ es igual a la cantidad de ceros de P en el interior de γ, por lo tanto P tiene 6 ceros en esa región y como es un polinomio de grado 6 entonces todas las raíces de P estan en la región.

Ahora veamos que P no tiene ceros en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Para esto observar que

$$|P(z)| \geq 6 - |-3z^5 + 2z^2 + z^6| \geq 6 - (3|z|^5 + 2|z|^2 + |z|^6)$$

pero $3|z|^5 + 2|z|^2 + |z|^6$ es menor estricto a 6 si $|z| < 1$ y por lo tanto $|P(z)| > 0$. En conclusión los ceros de P se encuentran en $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < \frac{7}{2}\}$.

2. Para probar que de hecho P no tiene ceros en $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ hay que refinar la desigualdad triangular del razonamiento anterior, en efecto

$$|P(z)| = |z^6 - 3z^5 + 2z^2 + 6| \geq ||2z^2 + 6| - |z^6 - 3z^5|| = ||2z^2 + 6| - |z|^5|z-3||$$

Por un lado $|2z^2 + 6| \geq 6 - |z|^2 \geq 4$. Por otro $|z|^5|z-3| \leq 4$ y es igual a 4 si y solo si $z = -1$, pero para $z = -1$ se tiene $|2z^2 + 6| = 8$ por lo tanto

$$|P(z)| \geq ||2z^2 + 6| - |z|^5|z-3|| = |2z^2 + 6| - |z|^5|z-3| > 0$$

probando lo deseado.

3. $$\int\limits_{|z|=\frac{7}{2}} \frac{6z^5 - 15z^4 + 4z}{z^6 - 3z^5 + 2z^2 + 6} dz = \int\limits_{|z|=\frac{7}{2}} \frac{P'}{P} dz$$

Como P es una función holomorfa sin ceros en $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{7}{2}\}$ entonces por el principio del argumento se tiene que

$$\int\limits_{|z|=\frac{7}{2}} \frac{6z^5 - 15z^4 + 4z}{z^6 - 3z^5 + 2z^2 + 6} dz = 2\pi i N_P = 12\pi i$$

donde N_P es la cantidad de ceros en el interior de la curva que por la parte 1 es igual a 6.

Ejercicio 2

1. f no es meromorfa en $\mathbb{C}$ ya que hay una singularidad no aislada en $z = 0$.

2. f si es meromorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ya que existe $A \subset \Omega$, $A = \{z \in \mathbb{C} : z = \frac{1}{k\pi},\ k \in \mathbb{Z}\}$ tal que:

    I) A no acumula en Ω. Pues A como subconjunto de $\mathbb{C}$ acumula en $z = 0$ pero $0 \notin \Omega$.

    II) $f \in H(\Omega \setminus A)$

    III) Los puntos de A son polos de f ya que:

    $$\lim_{z \to \frac{1}{k\pi}} \frac{1}{sen(\frac{1}{z})} = \infty$$

    y por supuesto, son singularidades aisladas, entonces son polos.

3. Clasifiquemos los polos. Usando el desarrollo de Taylor en un cero de la función $g(z) = sen(z)$ se tiene

    $$g(z) = f'(z_0)(z - z0) + f^{(3)}(z_0)(z - z_0)^3 + ... = f'(z_0)(z - z0)\,(1 + ...)$$

    donde $z_0 = k\pi$, entonces

    $$g(z) = (-1)^k (z - z_0)\varphi(z)$$

    con $\varphi(z_0) = 1$. Entonces

    $$\lim_{z \to \frac{1}{k\pi}} \frac{(z - \frac{1}{k\pi})^m}{g(\frac{1}{z})} = \lim_{z \to \frac{1}{k\pi}} \frac{(z - \frac{1}{k\pi})^m}{(-1)^k(\frac{1}{z} - k\pi)\varphi(\frac{1}{z})} = \lim_{z \to \frac{1}{k\pi}} \frac{z(z - \frac{1}{k\pi})^m}{(-1)^k k\pi(\frac{1}{k\pi} - z)\varphi(\frac{1}{z})}$$

    Con esto es claro que con $m = 1$ el límite da finito. En efecto

    $$\lim_{z \to \frac{1}{k\pi}} \frac{z(z - \frac{1}{k\pi})}{(-1)^k k\pi(\frac{1}{k\pi} - z)\varphi(\frac{1}{z})} = \frac{-1}{(-1)^k (k\pi)^2 \varphi(z_0)} = \frac{(-1)^{(k+1)}}{(k\pi)^2}$$

    Por lo tanto son polos de orden 1. También se puede calcular el limite haciendo Lôpital.

4. Como los polos son de orden 1, el residuo de los mismos es el valor del límite anterior

    $$Res(f, \frac{1}{k\pi}) = \frac{(-1)^{(k+1)}}{(k\pi)^2}$$

Ejercicio 3 Para calcular $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}$ consideramos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$. Consideramos la curva $\gamma_R : [-R, R] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = t$, y sea S_R una parametrización de la semicircunferencia de radio R como se muestra en la figura 1
Sea $\alpha_R = \gamma_R + S_R$ la curva concatenación de las anteriores. Como la función es meromorfa con polos en $z = i$ y $z = -i$, por el teorema de los residuos se tiene

$$\int_{\alpha_R} f(z)dz = 2\pi i \ ind_{\alpha_R}(i) Res(f, i) \ \ \forall R > 1$$

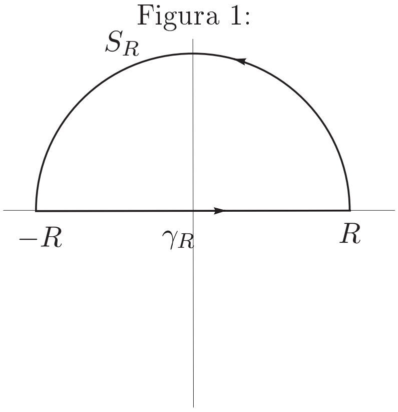
Estudiemos el polo en $z = i$. Como $f(z) = \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}$ es muy claro que en $z = i$ se tiene un polo de orden 3. En efecto,

$$\lim_{z \to i} (z - i)^3 f(z) = \frac{1}{(2i)^3} \neq 0$$

Ahora como el polo es de orden 3, entonces

$$Res(f, i) = \lim_{z \to i} \frac{1}{2} \left((z - i)^3 f(z)\right)'' = \lim_{z \to i} \frac{6}{(z + i)^5} = -\frac{3}{16} i$$

Figura 1:



Entonces

$$\int_{\alpha_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)^3}dx + \int_{S_R} f(z)dz = \frac{6\pi}{16} \ \forall \ R > 1$$

Como $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ entonces por el lema de deformación de curvas se tiene $\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)dz = 0$. Por lo tanto tomando límite en la expresión anterior se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)^3}dx = \frac{6\pi}{16}$$

Como el integrando es una función par se tiene

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}dx = \frac{3\pi}{16}$$

Ejercicio 4 Teórico