Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL.
Funciones de variable compleja.
Curso 2019.

EXAMEN - 22 DE JULIO DE 2019. DURACIÓN: 3:30

No. Examen	Apellido y nombre	Cédula	Firma

PARA USO DOCENTE

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej4	**Total**

Ejercicio 1. (20 puntos)
Sean $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x\}$, $\Pi_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq x\}$ y $\Pi_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \leq x\}$.

1. Hallar una transformación de Moebuis con $T(r) = r$ y $T(\Pi_1) = \Pi_2$.
2. Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$. Existe T de Moebuis tal que $T(r) = D$ y $T(Ox) = Ox$ siendo $Ox = \{(x,0) : \ x \in \mathbb{R}\}$? Justificar.

Ejercicio 2.(25 puntos)
Sea la función

$$f(z) = \frac{1}{sen(\frac{1}{z})}$$

1. Probar que f no es meromorfa en $\mathbb{C}$
2. Probar que f es meromorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
3. Cálcular el orden y los residuos de f en cada polo.

Ejercicio 3.(25 puntos)

Calcular

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$$

Ejercicio 4.(30 puntos)
Probar el siguiente resultado:
Teorema del índice. Sean γ un camino cerrado ($\gamma(a) = \gamma(b)$), $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ y la función $\mathrm{Ind}_\gamma : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

Entonces:
i) La función Ind_γ solo toma valores enteros.
ii) La función Ind_γ es continua. Por lo tanto, por el item i), se tiene que es constante en cada componente conexa de Ω.
iii) Si Ω_1 es la componente conexa de Ω que no está acotada entonces $\mathrm{Ind}_\gamma|_{\Omega_1} \equiv 0$.