Ejercicio 1

1. Para hallar una transformación que lleve r en r basta con tomar tres puntos de la recta y mandarlos en tres puntos de la recta. Al fijar la imagen de tres elementos distintos la transformación de Mobius queda determinada, y como las transformaciones de Mobius llevan rectas y circunferencia en rectas y circunferencias, no queda otra que $T(r) = r$. Si elejimos $T(0) = 0$, y $T(\infty) = \infty$ entonces
$$T(z) = kz$$
con $k \neq 0$. Ahora hay dos opciones a seguir.

   - Observar que $T(z) = kz$ fija todas las rectas por el origen y por lo tanto ya se cumple $T(r) = r$. Para lograr $T(\Pi_1) = \Pi_2$ basta con tomar $T(i) = -i$ por lo tanto
$$T(z) = -z$$
   - La otra opción es mandar un tercer punto de la recta a un punto de la recta. Para esto se debe tener cuidado de que $T(\Pi_1) = \Pi_2$. La forma de elegirlo es usando que las transformaciones de Mobius preservan orientación. Si tomamos una curva recorriendo $\{0, 1+i, \infty\}$ en ese orden, entonces para mandar Π_1 en Π_2 la imágen de la curva debe recorrer las imagenes $\{0, T(1+i), \infty\}$ en la orientación inversa. Para esto sirve tomar $T(1+i) = -(1+i)$ llegando a
$$T(z) = -z$$

2. No existe dicha transformación de Mobius. Como r y Ox se intersectan en 0 y en ∞ entonces $T(r) = D$ y $T(Ox) = Ox$ se intersectan en $T(0)$ y en $T(\infty)$. Entonces $T(0) = 1$ o $T(0) = -1$, en cualquiera de los casos el angulo que se formaba en la intersección del 0, de $\pi/4$ termino en una intersección de angulo $\pi/2$. Esto es absurdo ya que las transformaciones de Mobius son conformes.

Ejercicio 2

1. f no es meromorfa en $\mathbb{C}$ ya que hay una singularidad no aislada en $z = 0$.
2. f si es meromorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ya que existe $A \subset \Omega$, $A = \{z \in \mathbb{C} : z = \frac{1}{k\pi},\ k \in \mathbb{Z}\}$ tal que:
   I) A no acumula en Ω. Pues A como subconjunto de $\mathbb{C}$ acumula en $z = 0$ pero $0 \notin \Omega$.
   II) $f \in H(\Omega \setminus A)$
   III) Los puntos de A son polos de f ya que:
$$\lim_{z \to \frac{1}{k\pi}} \frac{1}{sen(\frac{1}{z})} = \infty$$
   y por supuesto, son singularidades aisladas, entonces son polos.
3. Clasifiquemos los polos. Usando el desarrollo de Taylor en un cero de la función $g(z) = sen(z)$ se tiene
$$g(z) = f'(z_0)(z - z0) + f^{(3)}(z_0)(z - z_0)^3 + ... = f'(z_0)(z - z0)\,(1 + ...)$$
donde $z_0 = k\pi$, entonces
$$g(z) = (-1)^k (z - z_0)\varphi(z)$$
con $\varphi(z_0) = 1$. Entonces

$$\lim_{z\to\frac{1}{k\pi}} \frac{(z-\frac{1}{k\pi})^m}{g(\frac{1}{z})} = \lim_{z\to\frac{1}{k\pi}} \frac{(z-\frac{1}{k\pi})^m}{(-1)^k(\frac{1}{z}-k\pi)\varphi(\frac{1}{z})} = \lim_{z\to\frac{1}{k\pi}} \frac{z(z-\frac{1}{k\pi})^m}{(-1)^k k\pi(\frac{1}{k\pi}-z)\varphi(\frac{1}{z})}$$

Con esto es claro que con $m=1$ el límite da finito. En efecto

$$\lim_{z\to\frac{1}{k\pi}} \frac{z(z-\frac{1}{k\pi})}{(-1)^k k\pi(\frac{1}{k\pi}-z)\varphi(\frac{1}{z})} = \frac{-1}{(-1)^k(k\pi)^2\varphi(z_0)} = \frac{(-1)^{(k+1)}}{(k\pi)^2}$$

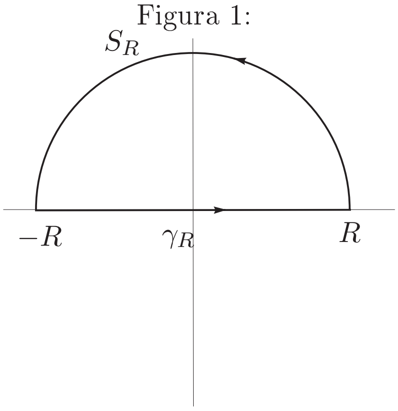
Por lo tanto son polos de orden 1. También se puede calcular el limite haciendo Lôpital.

4. Como los polos son de orden 1, el residuo de los mismos es el valor del límite anterior

$$Res(f,\frac{1}{k\pi}) = \frac{(-1)^{(k+1)}}{(k\pi)^2}$$

Ejercicio 3 Para calcular $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^3}$ consideramos $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ tal que $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^3}$. Consideramos la curva $\gamma_R:[-R,R]\to\mathbb{C}$ dada por $\gamma_R(t)=t$, y sea S_R una parametrización de la semicircunferencia de radio R como se muestra en la figura 1

Figura 1:



Sea $\alpha_R=\gamma_R+S_R$ la curva concatenación de las anteriores. Como la función es meromorfa con polos en $z=i$ y $z=-i$, por el teorema de los residuos se tiene

$$\int_{\alpha_R} f(z)dz = 2\pi i\ ind_{\alpha_R}(i)Res(f,i) \quad \forall R>1$$

Estudiemos el polo en $z=i$. Como $f(z)=\frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}$ es muy claro que en $z=i$ se tiene un polo de orden 3. En efecto,

$$\lim_{z\to i}(z-i)^3 f(z) = \frac{1}{(2i)^3} \neq 0$$

Ahora como el polo es de orden 3, entonces

$$Res(f,i) = \lim_{z\to i}\frac{1}{2}\left((z-i)^3 f(z)\right)'' = \lim_{z\to i}\frac{6}{(z+i)^5} = -\frac{3}{16}i$$

Entonces

$$\int_{\alpha_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R}\frac{1}{(x^2+1)^3}dx + \int_{S_R} f(z)dz = \frac{6\pi}{16}\ \forall\ R>1$$

Como $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ entonces por el lema de deformación de curvas se tiene $\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)dz = 0$. Por lo tanto tomando límite en la expresión anterior se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx = \frac{6\pi}{16}$$

Como el integrando es una función par se tiene

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx = \frac{3\pi}{16}$$

Ejercicio 4 Ver notas del curso.