Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL.
Curso: Funciones de variable compleja.

Examen 17 de julio de 2018. Duración: 3:30

No. Examen	Apellido y nombre	Cédula	Firma

PARA USO DOCENTE					
Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej4	Ej5	**Total**

Ejercicio 1. (20 puntos)

Calcular

$$\int_0^{+\infty} \frac{cos(x)dx}{x^2+4}.$$

Ejercicio 2.(20 puntos)
Sea $m \in \mathbb{N}$ con $m > 0$ y $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = z^m e^{\frac{1}{z}}.$$

1. Clasificar la singularidad de f.(10 puntos)
2. Sea $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) = e^{it}$. Calcular $\int_\gamma f(z)dz$.(10 puntos)

Ejercicio 3.(20 puntos)

1. Definir función meromorfa. (5 puntos)
2. Probar el siguiente resultado:
   Sea f meromorfa en Ω, $f \in H(\Omega \backslash A)$ (A el de la definición de meromorfa). Si Γ es un ciclo en $\Omega \backslash A$ tal que $\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 0\ \forall a \notin \Omega$, entonces
   $$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{a \in A} C_1(a)\mathrm{Ind}_\Gamma(a).(15\ puntos)$$

Ejercicio 4.(20 puntos)
Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$, $f \in H(D)$ tal que $|f(z)| < 1 - |z|$ para todo $z \in D$. Probar que $f \equiv 0$. (Sug. usar el principio del máximo)

Ejercicio 5.(20 puntos)
Sea $R \in \mathbb{R}$ con $R > 3$ y $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\} \cap \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \ x \geq 0\}$.

1. Probar que la ecuación $(z + 1)e^{-z} = 2z - 2$ tiene una única solución en D_R. (8 puntos)
2. Probar que la ecuación $(z + 1)e^{-z} = 2z - 2$ tiene una única solución en $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \geq 0\}$.(6 puntos)
3. Probar que la solución hallada es un número real.(6 puntos)