Funciones de variable compleja

Examen, 19 de Febrero de 2018

Apellidos	Nombres	Nº de Cedula	NºPrueba

Ejercicio 1.

Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$.

(a) Probar que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y los ceros de f acumulan en Ω, entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$.

(b) Sean $g, h \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que si gh es la función nula (es decir $g(z)h(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$), entonces g es la función nula o h es la función nula.

Ejercicio 2.

Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\, dx$ utilizando el método de los residuos.

Ejercicio 3.

Hallar la cantidad de raíces del polinomio $3z^4 + 7z^3 - z + 2$ en el disco unitario $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y en el exterior de D (esto es, en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$).

Ejercicio 4.

Hallar los ceros y las singularidades de $\dfrac{z(e^{iz} - 1)}{\operatorname{sen}^2 z}$.

Obs: se debe dar el orden de los ceros y de los polos.

Ejercicio 5.

La solución a la ecuación diferencial $y''' - y'' - y' + y = 1 - t$ con las condiciones $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 2$ es:

Obs: Puede ser de utilidad la siguiente propiedad: Si $Y(s)$ es la transformada de Laplace de una función $y(t)$, entonces $Y(s + \alpha)$ es la transformada de Laplace de $e^{-\alpha t}y(t)$.