Funciones de variable compleja

Examen, 19 de Febrero de 2018

Solución

Ejercicio 1.

(a) Ver teórico.

(b) Supongamos que ambas funciones son no nulas. Tomemos una de ellas, por ejemplo g. Como es no nula, existe al menos un $z_0 \in \Omega$ tal que $g(z_0) \neq 0$. Como por hipótesis $g(z_0)h(z_0) = 0$, resulta que necesariamente $h(z_0) = 0$. Ahora, este z_0 debe ser un cero aislado de h, ya que si fuese de acumulación, h sería idénticamente nula por la parte (a). Por lo tanto, debe existir un entorno de z_0 en el que $h(z) \neq 0$ salvo en z_0. Tomemos ahora una sucesión $\{z_n\}$ en ese entorno tal que $z_n \underset{n}{\to} z_0$ (que no sea la sucesión constante z_0). Como $g(z_n)h(z_n) = 0$ y $h(z_n) \neq 0$ para todo n, resulta $g(z_n) = 0$ para todo n. Pero $z_n \underset{n}{\to} z_0$ y g es continua (por ser holomorfa), por lo que concluimos que $g(z_0) = 0$, lo que es una contradicción.

Ejercicio 2.

Llamemos I a la integral buscada, es decir:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\, dx$$

Consideremos la función compleja

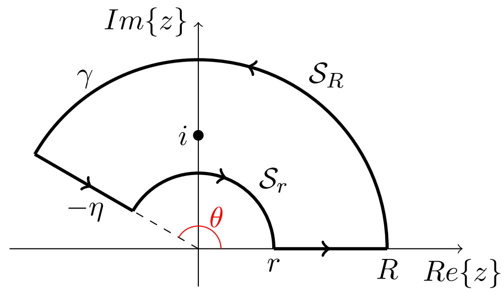
$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{1+z^2}$$

donde:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\operatorname{Arg}_{[-\pi,\pi)}(z)}{2}}$$

Esta función extiende a $\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ de forma meromorfa a todo el plano complejo menos la semirrecta $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0\,, \operatorname{Im}(z) = 0\}$. Los polos de f en ese dominio están en $\pm i$.

Consideremos entonces la curva γ de la figura:



Entonces, por el teorema de los residuos:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i Res\,(f, i)$$

Como i es un polo simple de f:

$$Res(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{\sqrt{z}}{(z+i)(z-i)} = \frac{\sqrt{i}}{2i} = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{2i}$$

Entonces:
$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \pi e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1+i)$$
Ahora, la integral sobre γ puede descomponerse como:
$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{[r,R]} f(z)\,dz + \int_{\mathcal{S}_R} f(z)\,dz - \int_{\eta} f(z)\,dz + \int_{\mathcal{S}_r} f(z)\,dz$$
Analicemos la integral sobre el segmento η. El mismo puede ser parametrizado por $z(t) = te^{i\theta}$ con $t \in [r,R]$. Así, tenemos que $\dot{z}(t) = e^{i\theta}$ y $\sqrt{z(t)} = \sqrt{t}e^{\frac{i\theta}{2}}$; la integral queda:
$$\int_{\eta} f(z)\,dz = \int_r^R \frac{\sqrt{t}e^{\frac{i\theta}{2}}}{1+t^2e^{2i\theta}} e^{i\theta}\,dt \underset{\theta\to\pi}{\longrightarrow} -i\int_r^R \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\,dt$$
Entonces, cuando $R \to +\infty$ y $r \to 0$, la integral sobre η tiende a $-iI$. Por otro lado, la integral el segmento $[r,R]$ converge a I, mientras que por el lema de deformación de curvas las integrales sobre $\mathcal{S}_R$ y $\mathcal{S}_r$ tienden a 0 independientemente del valor de θ. Entonces:
$$\frac{\pi}{\sqrt{2}}(1+i) = (1+i)I \Rightarrow I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$
Este ejercicio también puede ser resuelto usando el cambio de variable $u = \sqrt{x}$. Por más detalle sobre esa resolución, ver el Ejercicio 16.2.2 del capítulo 16 de las notas de Eleonora.

Ejercicio 3.

Llamemos $f(z) = 3z^4 + 7z^3 - z + 2$ y $g(z) = 7z^3$. Entonces en el borde del disco D tenemos:
$$|f(z) - g(z)| = |3z^4 - z + 2| \leq 3|z|^4 + |z| + 2 = 6 < 7 = |g(z)|$$
Además, esto garantiza que f no tiene ceros en el borde del disco, ya que:
$$|f(z)| = |f(z) + g(z) - g(z)| \geq ||g(z)| - |f(z) - g(z)|| > 0$$
donde para la primera desigualdad se usó la propiedad $|x - y| \geq ||x| - |y||$ y para la segunda se usó lo demostrado más arriba

Así, por el teorema de Rouché, f tiene la misma cantidad de raíces en D que g, es decir, 3. Como f no tiene raíces en el borde de D y es un polinomio de grado 4, concluimos que tiene una raíz en el exterior de D.

Ejercicio 4.

Estudiemos las singularidades de las funciones involucradas:

- $e^{iz} - 1$ se anula si $z = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Estos ceros son simples ya que:
$$\lim_{z\to 2k\pi} \frac{e^{iz}-1}{z-2k\pi} = \lim_{z\to 2k\pi} ie^{iz} = i$$
donde se usó L'Hopital en la primera igualdad.
- z tiene un cero simple en 0.
- $\operatorname{sen} z$ se anula en $z = m\pi$ con $m \in \mathbb{Z}$. Estos ceros son simples ya que:
$$\operatorname{sen} z = \pm(z - m\pi) \pm \frac{(z-m\pi)^3}{3!} \pm \frac{(z-m\pi)^5}{5!} + \dots$$
en un entorno de $m\pi$. Que los sumandos sumen o resten dependen de si m es par o impar.

Así, $\dfrac{z(e^{iz}-1)}{\operatorname{sen}^2 z}$ tiene polos de orden 2 en los múltiplos de impares de π (ya que el denominador tiene un cero de orden 2) y polos de orden 1 en los múltiplos pares de π (ya que el numerador tiene un cero de orden 1 y el denominador uno de orden 2). En $z = 0$ hay una singularidad evitable, ya que el numerador tiene un cero de orden 2 y el denominador también.

Ejercicio 5.

Si llamamos $Y(s)$ a la transformada de Laplace de y, entonces usando las condiciones iniciales tenemos que la transformada de y' es $sY(s)$, la de y'' es $s^2Y(s)$ y la de y''' es $s^3Y(s) - 2$. Así, la ecuación diferencial en el dominio de Laplace queda:

$$s^3Y(s) - 2 - s^2Y(s) - sY(s) + Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}$$

donde se usó que la transformada de t es $1/s^2$.

Despejando $Y(s)$ llegamos a:

$$Y(s) = \frac{2s^2 + s - 1}{s^2(s^3 - s^2 - s + 1)}$$

Observemos ahora que $s^3 - s^2 - s + 1 = (s+1)(s-1)^2$ y que $2s^2 + s - 1 = (s+1)(2s-1)$. Entonces:

$$Y(s) = \frac{2s-1}{s^2(s-1)^2} = \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{s^2}$$

Como la transformada de t es $\frac{1}{s^2}$, usando la propiedad que se da en la letra concluimos que $\frac{1}{(s-1)^2}$ es la transformada de te^t. Entonces llegamos a la solución:

$$y(t) = te^t - t$$