Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL.
Curso: Funciones de variable compleja.

Examen de diciembre de 2018. Duración: 3 hrs.

No. Examen	Apellido y nombre	Cédula	Firma

PARA USO DOCENTE			
Ej 1	Ej 2	Ej 3	**Total**

Ejercicio 1.(40 puntos)
Sea $S_R(t) = Re^{it}$ con $t \in [0, \pi/2]$ y γ la curva S_R compuesta con los segmentos $[0, R]$ y $[Ri, 0]$ orientada en forma antihorario.

1. Calcular $\int_\gamma \frac{e^{iz^2}}{1+z^4} dz$. (15 puntos)
2. Probar que $|e^{iz^2}| \leq 1$ para todo z en el primer cuadrante y deducir que
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} \frac{e^{iz^2}}{1+z^4} dz = 0 \text{ (10 puntos).}$$
3. Calcular $\int_0^{+\infty} \frac{cos(t^2) - sen(t^2)}{1+t^4} dt$. (15 puntos)

Ejercicio 2.(25 puntos)
Sea $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$.

1. Probar que la ecuación
$$(z-1)^m = \frac{e^{-z}}{2}$$
tiene m soluciones en $\{z \in \mathbb{C} : \quad |z-1| < 1\}$. (15 puntos)
2. Probar que si α es solución de la ecuación, entonces $\overline{\alpha}$ también es solución de la ecuación. (6 puntos)
3. Probar que si m es impar entonces por lo menos una de las soluciones halladas en 1. tiene que ser real. (4 puntos)

Ejercicio 3.(35 puntos)

1. Probar el siguiente resultado:
Estimativas de Cauchy. Sea $f \in H(\Omega)$ y $D(a,r) \subset \Omega$. Si $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in D(a,r)$ entonces, para cualquier $\rho < r$ y todo $n \in N$ se cumple que
$$|f^n(a)| \leq \frac{Mn!}{\rho^n} \cdot \text{ (15 puntos)}$$
2. Probar que si $f \in H(\mathbb{C})$ y está acotada entonces es constante. (10 puntos)
3. Probar que si $f \in H(\mathbb{C})$ y $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ entonces es constante. (10 puntos)