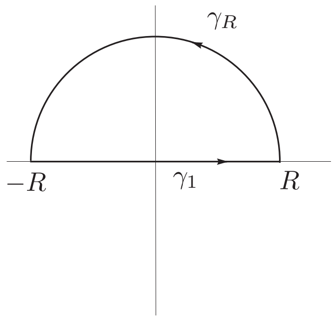
SOLUCIÓN EXAMEN 17 DE JULIO DE 2018

Ejercicio 1.

FIGURA 1.



(a)

Para cada $R \in \mathbb{R}$ con $R > 2$, consideramos la curva $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_R$ (mirar la figura 1) y la función $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4}\cdot$ El polo a considerar es $z = 2i$, que es un polo de orden 1. Por lo tanto

$$Res(f, 2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{e^{iz}}{z^2+4} = e^{-2}\lim_{z\to 2i}\frac{z-2i}{z^2+4} = \frac{e^{-2}}{4i}\cdot$$

Por lo tanto $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = \frac{e^{-2}}{4i}\cdot$
Por el lema de Jordan se tiene que $\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$.
Parametrizando $\gamma_1(t) = t$ con $-R \le t \le R$ se tiene que $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{e^{it}}{t^2+4}dt$.
Por lo tanto

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^2+4}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos(t)+isen(t)}{t^2+4} = \frac{e^{-2}}{4i}\cdot$$

Por lo tanto $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos(t)}{t^2+4} = \frac{e^{-2}\pi}{2}\cdot$ Como $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos(t)}{t^2+4} = 2\int_0^{+\infty}\frac{cos(t)}{t^2+4}$, entonces $\int_0^{+\infty}\frac{cos(t)}{t^2+4} = \frac{e^{-2}\pi}{4}\cdot$

Ejercicio 2.

Parte 1). Para clasificar la singularidad calculamos el $\lim_{z\to 0} z^m e^{\frac{1}{z}}$.
Si $z = x + iy$, tomamos la restricción $y = 0$. Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0^+} x^m e^{\frac{1}{x}} = +\infty \text{ y } \lim_{x\to 0^-} x^m e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

De esto último se tiene que $\lim_{z\to 0} z^m e^{\frac{1}{z}}$ no existe y por lo tanto $z = 0$ es una singularidad esencial.

Parte 2). Como $e^z = 1 + z + \cdots \frac{z^n}{n!} \cdots$ se tiene que $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \cdots \frac{1}{z^n n!} \cdots$. Por lo tanto

$$z^m e^{\frac{1}{z}} = z^m (1 + \frac{1}{z} + \cdots \frac{1}{z^n n!} \cdots) = z^m + z^{m-1} + \cdots \frac{z^{m-n}}{n!} \cdots .$$

Por lo tanto todos los términos del desarrollo de Laurent de $z^m e^{\frac{1}{z}}$ tienen primitiva excepto cuando $m - n = -1$ o sea cuando $n = m + 1$. Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z^m e^{\frac{1}{z}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z(m+1)!} dz = \frac{1}{(m+1)!} Ind_\gamma(0) = \frac{1}{(m+1)!}.$$

Ejercicio 3. Ver notas de teórico.

Ejercicio 4. Supongamos que f no es la función nula en D. Entonces existe $z_0 \in D$ tal que $f(z_0) \neq 0$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que cumple las siguientes propiedades:

- $0 < \varepsilon < |f(z_0)|$.
- $z_0 \in \overline{D_{1-\varepsilon}} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq 1 - \varepsilon\}$.

Como $|f|$ es continua y $\overline{D_{1-\varepsilon}}$ es un conjunto compacto entonces $|f|$ tiene máximo en $\overline{D_{1-\varepsilon}}$. Por otro lado tenemos que si $z \in \partial \overline{D_{1-\varepsilon}}$(= el borde de $\overline{D_{1-\varepsilon}}$) se cumple que

$$|f(z)| < 1 - |z| = 1 - (1 - \varepsilon) = \varepsilon < |f(z_0)|.$$

Por lo tanto el máximo de $|f|$ en $\overline{D_{1-\varepsilon}}$ está en el interior de $\overline{D_{1-\varepsilon}}$, lo que contradice el principio del máximo.

Ejercicio 5. Parte 1). Vamos a aplicar el Teorema de Rouché con $g(z) = (z+1)e^{-z} - (2z-2)$, $f(z) = -(2z-2)$ y la curva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_R$ es la de la figura 2. Por lo tanto $|f(z) - g(z)| = |(z+1)e^{-z}|$ y $|f(z)| = |2z - 2| = 2|z - 1|$.
Primero consideramos $z \in \gamma_1$ entonces $z = ti$ con $-R \leq t \leq R$. Entonces

$$|f(z) - g(z)| = |(z+1)e^{-z}| = |(ti+1)e^{-ti}| = |ti + 1| = \sqrt{t^2+1}.$$

$$|f(z)| = 2|z-1| = 2|ti - 1| = 2\sqrt{t^2+1}.$$

Por lo tanto se cumple que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$.

Si consideramos $z \in \gamma_R$ entonces $z = Re^{ti}$ con $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Entonces $|f(z) - g(z)| = |(z+1)e^{-z}| = |(Re^{ti}+1)e^{-Re^{ti}}| = |(Re^{ti}+1)|.|e^{-Re^{ti}}|$.

$|e^{-Re^{ti}}| = |e^{-R(cos(t)+isen(t))}| = e^{-R(cos(t)}$. Como $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ se cumple que $cos(t) \geq 0$ y por lo tanto $e^{-R(cos(t)} \leq 1$.
Por otro lado se tiene que $|(Re^{ti} + 1)| \leq R + 1$.
De donde se deduce que $|f(z) - g(z)| \leq R + 1$.

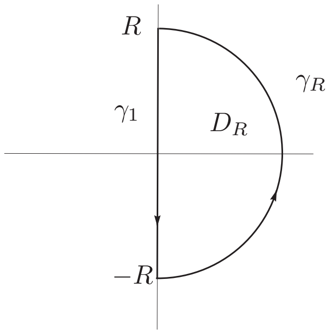
Por otro lado

$|f(z)| = 2|z - 1| = 2|(Re^{ti} - 1)| \geq 2(R - 1)$.

Por lo tanto, para que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ se tiene que cumplir que $R + 1 < 2(R - 1)$ y esto sucede si $R > 3$.

Parte 2). Supongamos que la ecuación tiene dos soluciones z_1 y z_2 en $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : \ x \geq 0\}$. Consideramos $R > 0$ tal que $R > |z_1|$ y $R > |z_2|$. Entonces $z_1, z_2 \in D_R$, lo que contradice la parte 1).
Parte 3). Es fácil probar que si z es solución entonces $\overline{z}$ es solución. Luego por la parte 1), se tiene que $z = \overline{z}$, lo que implica que z es real.

Figura 2.



(a)