Funciones de variable compleja

Examen, 19 de julio de 2017

Resolución

Ejercicio 1.

(a) Si $\gamma(t)$ con $t \in [a,b]$ es una parametrización de la curva γ, se define:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f[\gamma(t)]\,\dot\gamma(t)\,dt = \int_a^b Re\left(f[\gamma(t)]\,\dot\gamma(t)\right)dt + i\int_a^b Im\left(f[\gamma(t)]\,\dot\gamma(t)\right)dt$$

(b) Para $z \in D(0,1)$ definimos:

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\,dw$$

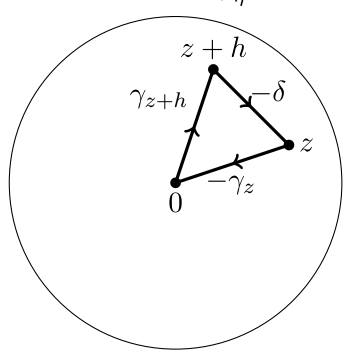
donde γ_z es el segmento que une el 0 con el z. Probaremos que F es primitiva de f, es decir $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in D(0,1)$. Para ello, debemos probar que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z)$$

El numerador de ese cociente es:

$$F(z+h)-F(z) = \int_{\gamma_{z+h}} f(w)\,dw - \int_{\gamma_z} f(w)\,dw$$

Si consideramos la curva η de la figura, entonces $\int_\eta f(w)\,dw = 0$ porque η es cerrada.



Pero:

$$0 = \int_\eta f(w)\,dw = \int_{\gamma_{z+h}} f(w)\,dw - \int_{\gamma_z} f(w)\,dw - \int_\delta f(w)\,dw \Rightarrow \int_{\gamma_{z+h}} f(w)\,dw - \int_{\gamma_z} f(w)\,dw = \int_\delta f(w)\,dw$$

donde δ es el segmento que va de z a $z+h$. Entonces:

$$F(z+h)-F(z) = \int_\delta f(w)\,dw$$

Parametrizando a δ como $\delta(t) = ht+z$ con $t \in [0,1]$ tenemos:

$$F(z+h)-F(z) = \int_0^1 f(ht+z)h\,dt = h\int_0^1 f(ht+z)\,dt$$

Si $f(z) = u(z)+iv(z)$, entonces:

$$F(z+h)-F(z) = h\left(\int_0^1 u(ht+z)\,dt + i\int_0^1 v(ht+z)\,dt\right) = h\left(u(h\theta_1+z)+iv(h\theta_2+z)\right)$$

con θ_1, $\theta_2 \in [0,1]$. La última igualdad sale de usar el teorema de valor medio para integrales reales. Así:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(u(h\theta_1+z)+iv(h\theta_2+z)\right) = u(z)+iv(z) = f(z)$$

ya que u y v son continuas (porque f es holomorfa). Entonces f tiene primitiva en el disco.

(c) Definamos la función $g(z) = z^2 f(z)$. Entonces $g \in \mathcal{H}(D(0,1)-\{0\})$ porque f lo es. Además es holomorfa en 0 ya que

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} hf(h) = 0$$

donde el último límite es 0 porque f es continua. Así, g es holomorfa en 0 y por lo tanto analítica. Esto implica que existe un radio r tal que:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \text{ para } z \in D(0,r)$$

Pero $g(0)=0$, $g'(0)=0$, por lo que $a_0 = a_1 = 0$. Entonces

$$g(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n = a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots$$

Despejando de la definición de g tenemos $f(z) = \dfrac{g(z)}{z^2}$ si $z \neq 0$. Usando el desarrollo de g:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} z^n = a_2 + a_3 z + a_4 z^2 + \dots \text{ para todo } z \neq 0. \tag{1}$$

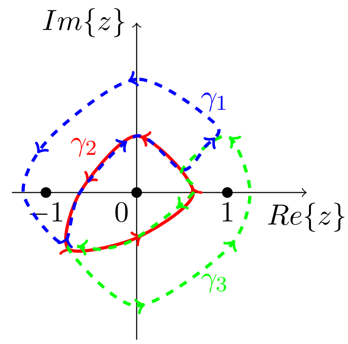
Además, sabemos que $a_2 = \dfrac{g''(0)}{2}$. Calculando $g''(0)$ resulta:

$$g''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g'(0+h)-g'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hf(h)+h^2 f'(h)}{h} = 2f(0)$$

Entonces $a_2 = f(0)$, por lo que el desarrollo en series de potencias dado por (1) vale para todo $z \in D(0,r)$, concluyendo que f es analítica en 0, y por lo tanto holomorfa.

Ejercicio 2.

Dividamos la curva γ en tres curvas como en la figura:



Entonces:
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z-1)(z+1)}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z(z-1)(z+1)}\,dz + 2\int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z(z-1)(z+1)}\,dz + \int_{\gamma_3} \frac{e^z}{z(z-1)(z+1)}\,dz$$
Usando la fórmula de Cauchy tenemos:
$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z(z-1)(z+1)}\,dz &= \int_{\gamma_1} \frac{\frac{e^z}{z(z-1)}}{z+1}\,dz = 2\pi i\frac{e^{-1}}{2} = \pi i e^{-1} \\
\int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z(z-1)(z+1)}\,dz &= \int_{\gamma_2} \frac{\frac{e^z}{(z+1)(z-1)}}{z}\,dz = -2\pi i \\
\int_{\gamma_3} \frac{e^z}{z(z-1)(z+1)}\,dz &= \int_{\gamma_3} \frac{\frac{e^z}{z(z+1)}}{z-1}\,dz = 2\pi i\frac{e}{2} = \pi i e
\end{aligned}$$
Y por lo tanto:
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z-1)(z+1)}\,dz = \pi i\left(e^{-1}+e-4\right)$$

Ejercicio 3.

(a) La transformada de Laplace de f es:
$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$$
para los p en los que esa integral converge. Si existen M y α reales positivos que cumplen $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$, entonces:
$$\left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt\right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|\left|e^{-pt}\right|\,dt \leq \int_0^{+\infty} Me^{\alpha t}e^{-Re(p)t}dt = \int_0^{+\infty} Me^{(\alpha-Re(p))t}dt$$
La última integral converge si $Re(p) > a$, por lo que la transformada de Laplace de f existe en ese semiplano.

(b) Usando la definición podemos calcular la transformada de e^t:
$$\mathcal{L}[e^t](p) = \int_0^{+\infty} e^t e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{(1-p)t}\,dt = \frac{1}{p-1} \text{ si } Re(p) > 1$$
Para la transformada de $\cos t$, usamos que $\cos t = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$, y por lo tanto:
$$\mathcal{L}[\cos t](p) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^{it}](p) + \mathcal{L}[e^{-it}](p)\right)$$
Estas transformadas de pueden calcular de forma análoga a la de e^t. Calculemos por ejemplo la de e^{it}:
$$\mathcal{L}[e^{it}](p) = \int_0^{+\infty} e^{it}e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{(i-p)t}\,dt = \frac{1}{p-i} \text{ si } Re(p) > 0$$
Razonando análogamente obtenemos:
$$\mathcal{L}[e^{-it}](p) = \frac{1}{p+i} \text{ si } Re(p) > 0$$
y entonces:
$$\mathcal{L}[\cos t](p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}\right) = \frac{p}{p^2+1}$$

(c) Si llamamos $Y(p)$ a la transformada de Laplace de $y(t)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y'](p) &= pY(p) - y(0) = pY(p) \\ \mathcal{L}[y''](p) &= p\mathcal{L}[y'](p) - y'(0) = p^2Y(p) - 1\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$p^2Y(p) - 1 + Y(p) = \frac{2}{p-1} \Rightarrow Y(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{p}{p^2+1}$$

Antitransformando tenemos que la solución es:

$$y(t) = e^t - \cos t$$

Ejercicio 4.

Usando que $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, tenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+a^2}\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2+a^2}\,dx\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+a^2}\,dx$$

donde la última igualdad sale de hacer el cambio de variable $u = -x$ en la segunda integral.

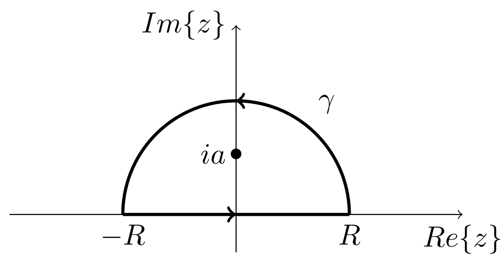
Si definimos la función compleja:

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+a^2} = \frac{e^{iz}}{(z+ia)(z-ia)}.$$

entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+a^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]} f(z)\,dz$$

Consideremos la curva γ de la figura:



Entonces:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i Res_f(ia)$$

Como ia es un polo simple de f tenemos:

$$Res_f(ia) = \lim_{z\to ia}(z-ia)f(z) = \lim_{z\to ia}\frac{e^{iz}}{z+ia} = \frac{e^{-a}}{2ia}$$

Entonces:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \frac{\pi e^{-a}}{a}$$

Por otro lado tenemos:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{\mathcal{C}_R} f(z)\,dz$$

donde $\mathcal{C}_R$ es el arco de circunferencia que une R con $-R$ pasando por el semiplano parte imaginaria positiva. Por el lema de deformación de curvas tenemos que:

$$\int_{\mathcal{C}_R} f(z)\,dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi e^{-a}}{a}$$

Ejercicio 5.

Estudiemos los ceros de las funciones involucradas:

- $e^z - 1$ se anula en $z = 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$. Estos ceros son simples ya que:
$$e^z - 1 = (z - 2k\pi i) + \frac{(z-2k\pi i)^2}{2} + \frac{(z-2k\pi i)^3}{3!} + \dots$$
en un entorno de $2k\pi i$.
- z tiene un cero simple en 0.
- $\operatorname{sen} z$ se anula en $z = m\pi$ con $m \in \mathbb{Z}$. Estos ceros son simples ya que:
$$\operatorname{sen} z = \pm(z - m\pi) \pm \frac{(z-m\pi)^2}{2} \pm \frac{(z-m\pi)^3}{3!} + \dots$$
en un entorno de $m\pi$. Que los sumandos sumen o resten dependen de si m es par o impar.

Así, $\dfrac{e^z-1}{z\operatorname{sen} z}$ tiene ceros de orden 1 en $2k\pi i$ para $k \neq 0$ y polos de orden 1 en $m\pi$ con $m \neq 0$. En $z = 0$ hay un polo de orden 1, ya que el numerador tiene un cero de orden 1 y el denominador uno de orden 2.